Zadanie 1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ. Wyznacz

(a) $\mathbb{P}(N_s = 1, N_t = 2)$ dla $0 \leqslant s < t$;

(b) $\mathbb{P}(N_t = i | N_s = j)$;

(c) $\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 \geqslant 2, N_3 \geqslant 3)$;

(d) $\mathrm{Cov}(N_s, N_t)$.

Zadanie 2. W dzień wyborów, wyborcy docierają do miejsca głosowania zgodnie z procesem Poissona. Średnio, 100 osób na godzinę. Jeżeli 150 osób przybyło podczas pierwszej godziny, jakie jest prawdopodobieństwo, że co najwyżej 350 osób przybędzie na wybory przed trzecią godziną?

Zadanie 3. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ i niech X_1 będzie pierwszym czasem przybycia. Udowodnij, że

$$\mathbb{P}(X_1 \leqslant x | N_t = 1) = \frac{x}{t}, \quad 0 \leqslant x \leqslant t.$$

Zadanie 4. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ. Niech T_n oznacza moment zajścia n-tego zdarzenia. Wyznaczyć dystrybuantę i gęstość rozkładu warunkowego X_4 pod warunkiem $N_1 = 2$. Oblicz $\mathbb{E}(X_4 | N_1 = 2)$.

Zadanie 5. Niech proces Poissona N_t będzie niezależny od nieujemnej zmiennej losowej T o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2. Oblicz $\mathrm{Cov}(T, N_T)$ oraz $\mathrm{Var}(N_T)$.

Zadanie 6. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z nieintensywnością λ. Udowodnij, że

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.n.} \lambda$$

przy $t \to \infty$.