Zadanie 1. Rzucamy symetryczną kostką. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 1, gdy wypada parzysta liczba oczek, 2 – jeśli nieparzysta. Wyznacz σ-ciało generowane przez zmienną losową X.

Zadanie 2. Niech $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie rodziną wzajemnie rozłącznych zbiorów takich, że $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $\mathbb{P}(B_i) > 0$, oraz niech $\mathcal{G} = \sigma(B_i,\ i = 1, 2, \ldots)$. Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbb{1}_{B_i}(\omega),$$

gdzie

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(B_i)} \int_{B_i} X \, \mathrm{d}\mathbb{P}, & \mathbb{P}(B_i) \neq 0, \\ \text{dowolna stała}, & \mathbb{P}(B_i) = 0. \end{cases}$$

Zadanie 3. Niech $A \in \mathcal{F}$. Udowodnij, że dla dowolnego $B \in \mathcal{F}$ takiego, że $\mathbb{P}(B) \in (0,1)$ zachodzi

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(A|B)\, \mathbb{1}_B + \mathbb{P}(A|B')\, \mathbb{1}_{B'}.$$

Zadanie 4. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$. Wyznacz $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, gdy $X(\omega) = \sqrt{\omega}$ oraz $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{4}]$, $(\frac{1}{4}, 1]$.

Zadanie 5. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Bernulliego $B(1,p)$, $p \in (0,1)$. Niech $Z = \mathbb{1}_{X+Y=1}$. Wyznacz $\mathbb{E}(X|Z)$ i $\mathbb{E}(Y|Z)$

Zadanie 6. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ oraz $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$. Wyznacz $\mathbb{E}(X|Y)$ dla $X(\omega) = 2\omega^2$ oraz $Y(\omega) = 1 - |2\omega - 1|$.

Zadanie 7. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}_{[0,1]}$ oraz $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$. Udowodnij, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X oraz $Y(\omega) = \omega(1-\omega)$ zachodzi

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{X(\omega) + X(1-\omega)}{2}.$$

Zadanie 8. Niech $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]^2}$ oraz $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]^2}$. Wyznacz $\mathbb{E}(f|g)$ dla $g(y) = y$ oraz $f(x,y) = x^2 y$.

Zadanie 9. Owad skład X jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a owad z jajeczka wylęga się z prawdopodobieństwem p, niezależne od innych. Oblicz średnią liczbę potomków.

Zadanie 10. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ oraz niech τ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ nieznależną od $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Wyznacz $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau} X_n\right)$.

Zadanie 11. Niech X będzie całkowalną zmienną losową z kwadratem. Warunkowa wariancją pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ zdefiniowana jest wzorem

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2 | \mathcal{G}\big].$$

Udowodnij następujące własności warunkowej wariancji:

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbb{E}^2[X|\mathcal{G}],$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})\big] + \mathrm{Var}\big[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big],$$