Zadanie 1. Gęstość rozkładu wektora losowego (X, Y) ma postać

$$f(x,y) = \left(\frac{3}{4}x + 2xy + \frac{1}{4}y\right) \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y).$$

Wyznacz $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2} | Y > \frac{1}{2})$.

Zadanie 2. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ oraz $\mathbb{P}$ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$. Niech $\mathcal{G}$ będzie σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{2}{3}]$, $(\frac{1}{3}, 1]$. Wyznacz $\mathbb{P}\big([0, \frac{3}{4}] | \mathcal{G}\big)$.

Zadanie 3. Rzucamy symetryczną kostką oraz prawidłową monetą. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równą wyrzuconej liczbie oczek. Zmienna losowa Y przyjmuje wartość 2, gdy na monecie wypadnie orzeł oraz 1, gdy wypadnie reszka. Wyznacz prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$, gdzie A oznacza zdarzenie, że X/Y jest liczbą całkowitą, a $\mathcal{G}$ oznacza σ-ciało generowane przez

(a) zmienną losową X;

(b) zmienną losową Y.

Zadanie 4. Niech $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}^2$, a $\mathbb{P}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4}\right)$$

względem miary Lebesgue'a. Niech $\mathcal{G} = \sigma(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\})$ oraz $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y < 0,\ y \leqslant 0\}$. Wyznacz $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$.