Zadanie 1. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową. Udowodnij, że

$$\varphi(c) = \mathbb{E}(X-c)^2$$

osiąga najmniejszą wartość, gdy c jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej X.

Zadanie 2. Niech X będzie całkowalną zmienną losową o wartościach rzeczywistych. Medianą zminnej losowej X nazywamy liczbę $\mathrm{med}(X)$ taką, że $\mathbb{P}(X \geqslant \mathrm{med}(X)) \geqslant \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{P}(X \leqslant \mathrm{med}(X)) \geqslant \frac{1}{2}$. Udowodnij, że

$$\varphi(c) = \mathbb{E}|X-c|$$

osiąga najmniejszą wartość, gdy c jest medianą zmiennej losowej X.
Wskazówka: Udowodnij i skorzystaj z tego, że jeśli $X \geqslant 0$, *to* $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$.

Zadanie 3. Wektorem statystyk pozycyjnych dla wektora losowego $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ nazywamy wektor $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) = (X_{k_1}, \ldots, X_{k_n})$ taki, że $X_{k_1} \leqslant \ldots \leqslant X_{k_n}$ i $(k_1, \ldots, k_n)$ jest permutacją $(1, \ldots, n)$. Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n$ są i.i.d z rozkładu o dystrybuancie F i gęstości f.

(a) Wyznacz wzór na dystrybuantę i gęstość k-tej statystyki pozycyjnej wektora $\boldsymbol{X}$.

(b) W przypadku gdy f jest gęstością rozkładu jednostajnego na $[0,1]$ oblicz $\mathbb{E}(X_{(k)})$ korzystając z odpowiedniego rozkładu Beta.