Zadanie 1. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonych wartościach oczekiwanych. Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnij, że

(a) jeśli $\mathbb{E}X_i = 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to proces $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

(b) jeśli $\mathbb{E}X_i \geqslant 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to proces $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest submartyngałem (podmartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

(c) jeśli $\mathbb{E}X_i \leqslant 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to proces $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest supermartyngałem (nadmartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadanie 2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie całkowalnych z kwadratem i o średniej zero. Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

Udowodnij, że $Y_n = S_n^2 - n\mathrm{Var}(X_1)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces X_n.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że cząstka błądzi losowo po prostej $\mathbb{R}$ po wszystkich współrzędnych całkowitych. Załżóżmy, że cząstka startuje z punktu zero. Z dowolnego punktu j przechodzi na prawo do punkt $j+1$ z prawdopodobieństwem p, a lewo do punktu $j-1$ z prawdopodobieństwem $q = 1-p$. Poprzez X_n oznaczmy pozycję cząstki po n ruchach. Wyznacz $\mathbb{E}(X_n)$ oraz $\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$. Czy X_n jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej?

Zadanie 4. Niech X będzie całkowalną zmienną losową oraz niech $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie pewną filtracją. Udowodnij, że proces $Y_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadanie 5. Niech X_n będzie (sub-, super-) martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$. Dla ustalonego $k > 1$, zdefiniujmy proces $\widetilde{X}_n = X_{k+n} - X_k$, $n = 1, \ldots$. Pokaż, że $\widetilde{X}_n$ jest (sub-, super-) martyngałem względem $\widetilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_{n+k}$.

Zadanie 6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych oraz $\mathbb{E}X_k = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne losowe X_n.

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$. Wyznacz wartość parametru a, aby ciąg $Y_n = a^n \cos\left(\pi \sum_{k=1}^n X_k\right)$ był martyngałem względem filtracji generowanej przez X_n

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Niech $Y_n = \exp\left(h \sum_{k=1}^n X_k\right)$.

(a) Wyznacz funkcje wartości oczekiwanej i funkcje autokowariancji procesu Y_n.

(b) Dla jakiej wartości $h \in \mathbb{R}$ proces Y_n jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej? Dla jakich h proces Y_n jest sub- lub supermartyngałem?

(c) Wyznacz funkcję średniej i funkcję autokowariancji procesu Y_n, tj. $\mu(n) = \mathbb{E}Y_n$ oraz $R(n,m) = \mathrm{Cov}(Y_n, Y_m)$.

Zadanie 9. Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym z czasem dyskretnym. Znajdź deterministyczny ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że proces $Y_n = X_n^3 + a_n X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces X_n.

Zadanie 10. Udowodnij, że funkcja wartości oczekiwanej martyngału jest stała w czasie. Co w przypadku sub- lub supermartyngału?

Zadanie 11. Udowodnij, że suma procesów stochastycznych będących martyngałami względem tej samej filtracji jest martyngałem względem tej filtracji.

Zadanie 12. Udowodnij, że przyrosty martyngału są parami nieskorelowane.

Zadanie 13. Udowodnij, że procesy stochastyczny będący martyngałem względem pewnej filtracji jest też martyngałem względem swojej naturalnej filtracji.