Oznaczenia. Dla wektora losowego $(X_1, \ldots, X_n)$ zmienna losowa $\overline{X}$ będzie oznaczać średnią arytmetyczną, tj. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Uwaga. Jeśli nie definiujemy funkcji straty, to przy obliczaniu ryzyka przyjmujemy kwadratową funkcję straty.

Zadanie 1. Rzucamy raz monetą, która ma prawdopodobieństwo p wyrzucenia orła wynoszące $\frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$. Na podstawie uzyskanego wyniku trzeba podjąć jedną z dwóch decyzji: $d_0 = \{p = \frac{1}{2}\}$, $d_1 = \{p = \frac{1}{3}\}$. Strata wynosi zero, gdy decyzja jest poprawna, oraz jeden, gdy decyzja nie jest poprawna. Opisz formalnie ten problem decyzyjny. Opisz wszystkie reguły decyzyjne i wyznacz ich funkcję ryzyka. Które z tych reguł decyzyjnych są dopuszczalne?

Zadanie 2. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego z parametrem $\frac{1}{\lambda}$. Funkcja straty zadana jest jako $L(\widehat{\lambda}, \lambda) = \left|\widehat{\lambda} - \lambda\right|^2$. Rozważmy dwa estymatory $\overline{X}$ oraz $cX_{(1)}$, $c > 0$. Wyznacz funkcję ryzyka tych estmatorów. Czy istnieje takie $c > 0$, że $\overline{X}$ jest lepsza od $cX_{(1)}$?

Zadanie 3. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ oraz $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ będą niezależnymi próbami prostymi z rozkładów odpowiednio $N(m_X, \sigma^2)$ oraz $N(m_Y, \sigma^2)$. Rozważając średniokwadratową funkcję straty, który z dwóch następujących estymatorów:

$$T_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \overline{X}\,\overline{Y} \qquad T_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

jest lepszym estymatorem parametru $\theta = m_X m_Y$? Pokaż, że powyższe estymatory są nieobciążonymi etymatorami dla parametru $\theta = m_X m_Y$.