

W zadaniach 2–10 będziemy zakładać, że $T = \mathbb{N}$.

Zadanie 1. Niech τ będzie momentem stopu względem pewnej filtracji. Czy zmienne losowe $\tau + 1$, $\tau - 1$ oraz τ^2 są też momentami stopu. Rozważmy przypadek, gdy $T = \mathbb{N}$ oraz $T = [\alpha, +\infty)$, gdzie $\alpha \geq 0$.

Zadanie 2. Udowodnij, że $\tau \equiv t$ jest momentem stopu względem dowolnej filtracji.

Zadanie 3. Udowodnij, że zmienna losowa $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ jest momentem stopu względem $\{\mathcal{F}_t\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ dla każdego t .

Zadanie 4. Niech τ oraz σ będą momentami stopu względem $\{\mathcal{F}_t\}$. Udowodnij, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$ oraz $\tau + \sigma$ są momentami stopu. Czy zmienna losowa $\tau - \sigma$ jest momentem stopu?

Zadanie 5. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}$. Udowodnij, że

- (a) $\mathcal{F}_\tau$ jest σ -ciałem;
- (b) Jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$;
- (c) $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $\{\tau = t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ dla każdego t .

Zadanie 6. Niech τ_1 oraz τ_2 będą momentami stopu względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}$. Udowodnij, że jeśli $\tau_1 \leq \tau_2$, to $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zadanie 7. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}$ oraz niech X_t będzie ciągiem adaptowanym do $\{\mathcal{F}_t\}$. Udowodnij, że

- (a) τ jest $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalna
- (b) X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalna na zbiorze $\{\tau < \infty\}$.

Zadanie 8. Niech τ oraz σ będą momentami stopu. Udowodnij, że zdarzenia $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau > \sigma\}$, $\{\tau \leq \sigma\}$, $\{\tau \geq \sigma\}$ oraz $\{\tau = \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$ oraz $\mathcal{F}_\sigma$.

Zadanie 9. Niech X_t będzie ciągiem zmiennych losowych adaptowanych do filtracji $\{\mathcal{F}_t\}$. Udowodnij, że chwila pierwszej wizyty X_t w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest momentem stopu. Zdefiniuj moment pierwszej wizyty X_t w zbiorze B po chwili τ , gdzie τ jest momentem stopu względem $\{\mathcal{F}_t\}$. Czy taka zmienna losowa też jest momentem stopu? Co w przypadku k -tej wizyty X_t w zbiorze B ?