Zadanie 1. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$. Korzystając z definicji pokazać, że $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=1}^{n} X_k$ jest statstyką dostateczną dla λ.

Zadanie 2. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą. Korzystając z kryterium faktoryzacji, wyznaczyć statystyki dostateczne $T(X_1, \ldots, X_n)$ dla nieznanych parametrów, gdy X_i, $i = 1, \ldots, n$ mają rozkład

(a) gamma z parametrami α oraz λ,

(b) jednostajny na odcinku (a, b),

(c) Bernuliego $B(1, p)$ z parametrem p.

Zadanie 3. Losujemy bez zwracania n jednostek z partii N wyrobów, spośród których $N\theta$ jest wadliwych. Niech X_i, $i = 1, \ldots, n$, będzie zmienną losową, która przyjmuje wartość 1, gdy i-ta jednostka jest wadliwa i wartość 0, gdy i-ta jednostka jest dobra. Pokazać, że statystyka $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest dostateczna dla parametru θ.

Zadanie 4. Niech $\boldsymbol{Z} = ((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ będzie próbą prostą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego $N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, gdzie $\mathbf{0}$ jest wektorem zerowym, a maicerz

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć statystykę dostateczną dla parametru θ. Udowodnij, że $T_1(\boldsymbol{Z}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ oraz $T_2(\boldsymbol{Z}) = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ są swobodne, ale statystyka $T_1(\boldsymbol{Z}) + T_2(\boldsymbol{Z})$ nie jest swobodna.

Zadanie 5. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(\theta, 1)$. Rozpatrzmy problem estymacji prawdopodobieństwa $\mathrm{P}(X_i \leqslant c)$, $i = 1, \ldots, n$ dla pewnego ustalonego $c \in \mathbb{R}$ z następującą funkcją straty: $L(\theta, d) = [d - \Phi(c - \theta)]^2$, gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0, 1)$. Niech

$$d_0(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, c]}(X_i).$$

Korzystając z twierdzenia Rao-Blackwella, wyprowadzić funkcję decyzyjną opartą na statystyce dostatecznej dla parametru θ, która jest nie gorsza niż funkcja decyzyjna d_0.