Zadanie 1. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznaczyć σ-ciało na Ω generowane przez $[0,5]$ oraz $[1,3]$.

Zadanie 2. Niech $\Omega = [0,1)$. Wyznaczyć σ-ciało na Ω generowane przez zbiory $\{1/4\}$ oraz $(0,1/2]$.

Zadanie 3. Pokazać, że rodzina $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ składająca się ze zbiorów przeliczalnych oraz zbiorów o przeliczalnych dopełnieniach jest σ-ciałem. Pokazać, że jeśli jest nieprzeliczalna, to istnieje $A \subset \Omega$, taki że $A \notin \mathcal{F}$.

Zadanie 4. Niech T będzie dowolnym zbiorem indeksów, niech $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ - rodzina σ-ciał. Pokazać, że $\bigcap_{t\in T} \mathcal{F}_t$ jest σ-ciałem.

Zadanie 5. Dany jest ciąg σ-ciał na Ω taki, że $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Sprawdzić, czy $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ jest σ-ciałem.

Zadanie 6. Niech $\Omega = [0,4]$ oraz $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[1,3]$ oraz $[2,4]$. Które z poniższych funkcji są funkcjami mierzalnymi?

(a) $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F}), \quad f(x) = x;$

(b) $g : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{B}), \quad g(x) = x;$

(c) $h : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F}), \quad h(x) = 1;$

(d) $k : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{B}), \quad k(x) = 1.$

Poprzez $\mathcal{B}$ oznaczamy σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$.

Zadanie 7. Niech $\Omega = [-1,2]$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało, dla którego funkcja $f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(x)$ jest mierzalna.

Zadanie 8. Niech Ω będzie zbiórem nieprzeliczalny, $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem składające się ze zbiorów przeliczalnych oraz zbiorów o przeliczalnych dopełnieniach. Niech $\mu : \mathcal{F} \mapsto [0, +\infty)$ jest określona następująco: $\mu(A) = 0$, gdy A jest zbiorem przeliczalnym, $\mu(A) = 1$, gdy A ma przeliczalne dopełnienie. Czy μ jest miarą probabilistyczną?

Zadanie 9. Niech $\Omega = A \cup B \cup C$. Załóżmy, że $\mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(C) = 3\mathrm{P}(A)$ oraz $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A\cap C) = \mathrm{P}(B\cap C)$. Pokazać, że $\frac{1}{6} \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant \frac{1}{4}$. Pokazać, że oba ograniczenia mogą być osiągniete.

Zadanie 10. Załóżmy, że $\mathrm{P}(A\cup B) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ oraz $\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathrm{P}(A)$ oraz $\mathrm{P}(A \setminus B)$.

Zadanie 11. Wiadomo, że $\mathrm{P}(A) = 0.9$ i $\mathrm{P}(B) = 0.8$. Wykazać, że $\mathrm{P}(A|B) \geqslant 0.875$.

Zadanie 12. Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi takimi, że $\mathrm{P}(A|B\cap C) = \frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B|A\cap C) = \frac{9}{10}$ oraz $\mathrm{P}(C|A\cap B) = \frac{6}{10}$. Obliczyć

$$\mathrm{P}(A\cap B\cap C \,|\, (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)).$$