Określmy proces $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Niech N będzie pewnną zmienną losową. Poprzez S_N będzimy oznaczać $S_N(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$, $w \in \Omega$.

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli X jest zmienną losową przyjmującą wartości całkowite, to

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant j).$$

Wyznacz analogiczny wzór dla $\mathbb{E}X^p$ dla $p \geqslant 1$.

Zadanie 2. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,1]$. Niech $\tau = \inf\{n : S_n \geqslant 1\}$. Wyznacz $\mathbb{E}\tau$. Oszacuj wartość $\mathbb{E}\tau$ za pomocą metody Monte Carlo.
Wskazówka: Zmienna losowa S_n ma rozkład Irwina–Halla o gęstości

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} (x-k)^{n-1}, \quad x \in [0,n]$$

Zadanie 3. Udowodnij Tożsamość Walda: Jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, zaś τ jest momentem stopu wzlgędem $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathbb{E}\tau < \infty$, to

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau\, \mathbb{E}X_1.$$

Zadanie 4. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć średnią sumy wyrzuconych oczek.

Zadanie 5. Nich $\{X_n\}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym oraz niech $\tau_1 = \inf\{n : X_n \geqslant 1\}$. Udowodnij, że $\mathbb{E}\tau_1 = \infty$.

Zadanie 6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, nieujemnymi z wartością oczekiwaną równą 1. Niech τ będzie ograniczonym momentem stopu. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{\tau} X_k\right] = 1$$

Zadanie 7. Niech X_t będzie martyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}$, a τ będzie momentem stopu względem tej samej filtracji. Udowodnij, że $X_t^\tau = X_{t\wedge\tau}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}$.

Zadanie 8. Niech $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ będzie martyngałem.

(a) Załóżmy, że τ oraz σ będą ograniczonymi momentami stopu spełniającymi $\sigma \leqslant \tau$. Udowodnij, że $\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$

(b) Załóżmy, że istnieje całkowalana zmienna losowa Y taka, że $|X_t| \leqslant Y$ dla każdego t. Niech τ będzie skończonym momentem stopu. Udowodni, że $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.

(c) Załóżmy, że martyngał X ma ograniczone przyrosty, tj. istnieje $M > 0$ taka, że $|X_{n+1} - X_n| \leqslant M$ dla każdego n. Niech τ będzie momentem stopu takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Udowodnij, że $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.