Niech $W = (W(t))_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera.

Zadanie 1. Udowodnij, że poniższe transformacje procesu Wienera $W(t)$ są procesami Wienera:

(a) $V(t) = -W(t)$,

(b) $V(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}W(ct)$, $c \geqslant 0$,

(c) $V(t) = \begin{cases} tW(1/t) & t > 0, \\ 0 & t = 0. \end{cases}$

Zadanie 2. Udowodnij, że funkcja autokowariancji procesu Wienera jest następującej postaci $\mathrm{Cov}\,(W(t), W(s)) = \min(t, s)$.

Zadanie 3. Wyznacz

(a) $\mathbb{P}\,(0 < W(t) < W(s))$,

(b) $\mathbb{E}\left[W^2(2)(W(3) - W(1))\right]$,

(c) $\mathbb{P}\,(W(2) - 2W(3) \leqslant 4)$,

(d) $\mathrm{Var}\,(3 + W(4) - 2W(2) + W(3))$,

(e) $\mathrm{Cov}\,(3 + W(4) - 2W(2), 5 + W(3))$.

Zadanie 4. Wyznacz gęstość zmiennej losowej $W(b) + W(a)$ dla $0 \leqslant a < b$.

Zadanie 5. Wyznacz rozkład warunkowy $W(t)$ pod warunkiem $W(s)$.

Zadanie 6. Mostem Browna nazywamy proces $B(t) = W(t) - tW(1)$, $t \in [0, 1]$.

(a) Sprawdz czy proces $B(t)$ jest martyngałem.

(b) Wyznacz funkcje autokowariancji procesu $B(t)$.

(c) Udowodnij, że

$$X(t) = (t + 1)B\left(\frac{t}{t+1}\right)$$

jest procesem Wienera na odcinku $[0, \infty)$.

Zadanie 7. Udowodnij, że poniższe procesy są martyngałami:

(a) $W(t)$,

(b) $W^2(t) - t$.

Zadanie 8. Niech Z będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Udowodnij, że $X(t) = \sqrt{t}Z$ nie jest procesem Wienera.

Zadanie 9. Niech $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\sigma > 0$. Zdefiniujmy proces $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$.

(a) Udowodnij, że proces $X(t)$ ma niezależne i stacjonarne przyrosty.

(a) Wyznacz rozkład $X(t)$.

(c) Czy proces $X(t)$ jest martyngałem?

Zadanie 10. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : W(t) = a\}$.

Zadanie 11. Udowodnij, że dla dowolnego $t > 0$

$$\mathbb{P}(\max_{s\leqslant t} W(s) > 0) = \mathbb{P}(\min_{s\leqslant t} W(s) < 0) = 1.$$