

Zadanie 1. Pokazać, że ryzyko estymatora bayesowskiego $d(X) = (X + a)/(n + a + b)$ dla prawdopodobieństwa sukcesu w schemacie Bernoulliego z $X \sim B(n, \theta)$ ma przy kwadratowej funkcji strat postać

$$R(d, \theta) = \frac{\theta^2[(a+b)^2 - n] + \theta[n - 2a(a+b)] + a^2}{(a+b+n)^2}.$$

Zadanie 2. Przypuśćmy, że X ma rozkład Bernoulliego $B(n, p)$. Udowodnij, że X/n jest bayesowskim estymatorem parametru p przy rozkładzie *a priori* $U(0, 1)$ oraz przy funkcji straty

$$L(p, d) = \frac{(p - d)^2}{p(1 - p)},$$

a także jest to estymator minimaxowy.

Zadanie 3. Rozważmy zbiór stanów natury $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, zbiór decyzji $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ oraz

$$P_{\theta_1}(X = 0) = 0,3 = 1 - P_{\theta_1}(X = 1),$$

$$P_{\theta_2}(X = 0) = 0,6 = 1 - P_{\theta_2}(X = 1).$$

Rozpatrzmy problem podejmowania decyzji, w którym funkcja straty określona jest przez następujące wartości:

$$L(\theta_1, a_1) = 0, \quad L(\theta_1, a_2) = 7, \quad L(\theta_1, a_3) = 4,$$

$$L(\theta_2, a_1) = 12, \quad L(\theta_2, a_2) = 1, \quad L(\theta_2, a_3) = 6$$

Wyznacz wszystkie (niezrandomizowane) funkcje decyzyjne. Które z tych funkcji decyzyjnych są minimaxowe?