Zadanie 1. Niech $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{[0,1)}$ oraz P - miara Lebesgue'a. Rozważmy rozwinięcie liczby ω:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\omega)}{2^n},$$

gdzie $d_n(\omega)$ przyjmuje wartości 1 albo 0. Niech $A_n = \{\omega : d_n(\omega) = 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Czy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ są niezależne?

Zadanie 2. Sprawdzić czy prawdziwa jest nierówność $\mathrm{P}(\liminf A_n) \leqslant \mathrm{P}(\limsup A_n)$.

Zadanie 3. Niech A_n będzie kwadratem $\{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$ obróconym o kąt $2\pi n\theta$ wokół punktu $(0, 0)$. Wyznaczyć $\liminf A_n$ oraz $\limsup A_n$, gdy $\theta \in \mathbb{Q}$. Dla jakich θ istnieje lim?

Zadanie 4. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń spośród nich.

Zadanie 5. Rozważamy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$ w pojedynczej próbie. Wykazać, że

(a) ciąg (sukces, porażka, porażka, sukces, porażka, porażka) wystąpi nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1.

(b) jeśli $p \neq \frac{1}{2}$, to z prawdopodbobiństwem 1 zachodzi skończenie wiele zdarzeń

$$A_n = \{\text{liczba sukcesów jest równa liczbie porańek w pierwszych } n \text{ rzutach}\}.$$

Wskazówka: Wzór Stirlinga: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$