

Zadanie 1. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem λ . Zmienne losowe X_1, X_2, \dots są niezależne od N i mają rozkład jednostajny na odcinku $X_n \sim [n, 2n]$, $n = 1, 2, \dots$. Oblicz $\text{Var}(X_N)$.

Zadanie 2. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots są niezależne i mają te same rozkłady, a zmienna losowa N jest od nich niezależna i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 2. Oblicz $\text{Cov}(V_N, N)$, gdy

$$V_n = \frac{X_1}{S_n}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n+1} X_i.$$

Zadanie 3. Owad składa jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ , a owad z jajeczka wylęga się z prawdopodobieństwem p , niezależne od innych. Oblicz średnią liczbę potomków.

Zadanie 4. Oblicz wartość oczekiwaną liczby prób w schemacie Bernulliego przeprowadzonych aż do momentu uzyskania kolejno sukcesu i porażki.

Zadanie 5. Doświadczalny szczur został umieszczony w pewnym punkcie labiryntu i próbuje się go wydostać. Jeżeli ruszy w prawo, to będzie błądził przez 3 minuty i wróci do punktu wyjścia. Jeśli ruszy w lewo, to z prawdopodobieństwem $1/3$ wydsotanie się z labiryntu po 2 minutach, a z prawdopodobieństwem $2/3$ wróci do punktu wyjścia po 5 minutach błądzenia. Za każdym razem, gdy jest w punkcie wyjścia, rusza w prawo lub w lewo z tym samym prawdopodobieństwem $1/2$. Wyznacz wartość oczekiwaną czasu spędzonego przez szczura w labiryncie.

Zadanie 6. Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, przyjmujących z pewnymi prawdopodobieństwami wartości ze zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$. Obserwujemy ciąg aż do momentu T , w którym po raz pierwszy pojawi się ta sama wartość, która przyjęta zmienna X_1 . Wyznacz $\mathbb{E}(T)$.