Zadanie 1. Niech ν, μ, m będą miarami σ-sknoczonymi na $(\Omega, \mathcal{F})$. Wykazać, że

(W1) $(\nu \ll \mu \quad \wedge \quad \mu \ll m) \quad \Rightarrow \quad \left(\nu \ll m \quad \wedge \quad \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}\right)$,

(W2) $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mu} = 1$ (μ−p.w.),

(W3) $\mu \equiv \nu \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}$.

Zadanie 2. Dane są dwa dwumianowe rozkłady prawdopodobieństwa $P_1 \sim B(n, p)$ oraz $P_2 \sim B(k, q)$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$, $0 < q \leqslant p < 1$. Zbadać czy $P_1 \ll P_2$ oraz czy $P_2 \ll P_1$.

Zadanie 3. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń mierzalna, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcja mierzalna taka, że $f \geqslant 0$ μ−p.w. oraz $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 1$. Wykazać, że ν określona na $\mathcal{F}$ tak, że $\nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$ jest miarą probabilistyczną.

Zadanie 4. Rozkłady prawdopodobieństwa P_1, P_2 na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ są całkami

$$P_i(A) = \int_A p_i(x)\,\mathrm{d}x \quad A \in \mathcal{B},$$

gdzie $p_1(x) = \beta \exp(-\beta(x-b))\, \mathbb{1}_{[b,\infty)}(x)$ oraz $p_2(x) = \beta \exp(-\beta x)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, gdzie $b, \beta > 0$. Zbadać czy $P_1 \ll P_2$ oraz czy $P_2 \ll P_1$.

Zadanie 5. Rozkłady prawdopodobieństwa P_1, P_2 na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ są zadane przez gęstości względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Załóżmy, że $p_1(x) = \beta \exp(-\beta x)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ oraz $p_2(x) = \frac{\beta}{2} \exp(-\beta|x|)$, gdzie $\beta > 0$. Zbadać czy $P_1 \ll P_2$ oraz czy $P_2 \ll P_1$. W przypadku absolutnej ciągłości, podać dwie różne wersje odpowiedniej pochodnej Radona-Nikodyma.

Zadanie 6. Wyznaczyć a tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cos(x) + a, & \text{gdy } x \in (0, \pi), \\ 0, & \text{gdy } x \notin (0, \pi), \end{cases}$$

była gęstością rozkładu prawdopodobieństwa względem miary Lebesgue'a.

Zadanie 7. Wyznaczyć a tak, aby funkcja

$$f(x) = \frac{a}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

była gęstością rozkładu prawdopodobieństwa względem miary Lebesgue'a.