Zadanie 1. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ jest próbą prostą z rozkładu o gęstości $f(x) = 2b^2x^{-3}\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x)$, $b > 0$. Wyznaczyć statystykę dostateczną i zupełną dla b a następnie wyznaczyć nieobciążony estymator b^r, $r \in \mathbb{N}$, będący funkcją tej statystyki.

Zadanie 2. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ jest próbą prostą z rozkładu o gęstości $f(x) = \alpha x^{-2}\mathbb{1}_{(\alpha,\infty)}(x)$, $\alpha > 0$. Wyznaczyć estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru α.

Zadanie 3. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ oraz $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ są niezależnymi próbami prostymi z rozkładów, odpowiednio, $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ oraz $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Wszystkie parametry rozkładów są nieznane. Wyznaczyć estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru σ^2. Rozważ dwa przypadki:

(a) $m = n$,

(b) $m \neq n$.

Zadanie 4. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ jest próbą prostą z rozkładu Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Wyznaczyć estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru $g(\lambda) = \mathrm{P}(X_1 = 0)$.

Zadanie 5. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu Bernulliego $p(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x \in \{0, 1\}$, $\theta \in (0, 1)$. Wyznaczyć estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru θ^2.

Zadanie 6. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o niezależnych współrzędnych takich, że X_i mają rozkłady normalne $N(\alpha + \beta t_i, \sigma^2)$ gdzie α, β, σ^2 są nieznane a t_i są znanymi stałymi różnymi między sobą, $i = 1, \ldots, n$. Wyznaczyć ENMW parametrów α i β na podstawie obserwacji wektora $\boldsymbol{X}$.

Zadanie 7. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ oraz $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ są niezależnymi próbami prostymi z rozkładów, odpowiednio, $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ oraz $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Wszystkie parametry rozkładów są nieznane. Wyznacz ENMW funkcji $g(\mu_X, \mu_Y, \sigma) = \mu_X - \mu_Y + \sigma$.

Zadanie 8. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu geometrycznego o funkcji prawdopodobieństwa $\mathrm{P}_\theta(X = x) = (1-\theta)\theta^x$, $x = 0, 1, \ldots$ oraz $\theta \in (0, 1)$. Wyznacz ENMW dla $g(\theta) = \theta(1-\theta)$.
Wskazówka: Rozważ na początku estymator $\widetilde{g}(X) = 1_{\{X_1=1\}}(x)$ i wykorzystaj fakt, że $\mathrm{P}_\theta(\sum_{k=1}^n X_k = t) = \binom{n+t-1}{t}(1-\theta)^n\theta^t$, $t = 0, 1, \ldots$