

Zadanie 1. Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu Poissona.

Zadanie 2. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu wykładniczego z parametrem λ . Następnie na podstawie funkcji charakterystycznej wyznaczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję rozkładu wykładniczego.

Zadanie 3. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X , dla której dla dowolnego zbioru borelowskiego A

$$P(X \in A) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_A(1) + \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \mathbb{1}_A(x) dx$$

i na jej podstawie wyznaczyć $\mathbb{E}(X)$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi i jeśli tak, wyznaczyć odpowiedni rozkład:

- (a) $\varphi(t) = \cos t$;
- (b) $\varphi(t) = \cos^2 t$;
- (c) $\varphi(t) = e^{-i|t|}$;
- (d) $\varphi(t) = (1 - t^2) \mathbb{1}_{\{|t| < 1\}}$.

Zadanie 5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Obliczyć funkcje charakterystyczne zmiennych losowych XY .

Zadanie 6. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną $\varphi(t) = \cos^3 t$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Y = X^3 + 2X^2 + 1$.

Zadanie 7. Pokazać, że jeśli φ jest rzeczywistą funkcją charakterystyczną, to zachodzi nierówność

$$1 - \varphi(2t) \leq 4(1 - \varphi(t)).$$

Zadanie 8. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe p . Niech X będzie liczbą rzutów potrzebnych do uzyskania n orłów. Znajdź rozkład graniczny zmiennych losowych $2Xp$, gdy $p \rightarrow 0$.

Zadanie 9. Niech zmienne losowe X_n mają rozkład Poissona z parametrami $\lambda_n \rightarrow \infty$. Udowodnij, że

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{oraz} \quad \frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Zadanie 10. Owad składa jaja każdego dnia niezależnie, zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ . Każdej nocy mrówki kradną mu jaja. Każde jajo może zostać ukradzione, niezależnie z prawdopodobieństwem p . Wyznaczyć rozkład liczby ocalałych jaj po n cyklach. Jaki jest rozkład graniczny jaj ocalałych przed mrówkami gdy $n \rightarrow \infty$?