

Zadanie 1. Niech f, g funkcje borelowsko mierzalne. Udowodnić, że jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne, to zmienne losowe $f(X)$ i $g(Y)$ są niezależne. Czy implikacja odwrotna jest prawdziwa?

Zadanie 2. Wykazać, że zmienna losowa jest niezależna od siebie samej wtedy i tylko wtedy, gdy jest stała z prawdopodobieństwem jeden. Czy zmienne losowe X i $f(X)$ mogą być niezależne, gdy f jest funkcją borelowską?

Zadanie 3. Dwie niezależne zmienne losowe X i Y mają standardowe rozkłady normalne. Wyznaczyć rozkłady (gęstości) zmiennych losowych

(a) $X^2 + Y^2$,

(b) X/Y .

Zadanie 4. Zmienne losowe X i Y są niezależne, gdzie X ma standardowy rozkład normalny. Natomiast Y ma rozkład wykładniczy $Exp(1)$. Obliczyć $P(X^2 > Y/2)$.

Zadanie 5. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $U = X/(X + Y)$, gdy X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych $Exp(\lambda)$.

Zadanie 6. Niech X, Y, Z niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Niech $S = X + Y + Z$. Obliczyć $P(X > S/2 \vee Y > S/2, \vee Z > S/2)$.

Zadanie 7. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady wykładnicze o gęstości $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{\{x>0\}}$. Niech $U = \min(X, Y)$ oraz $V = \max(X, Y)$. Sprawdź czy zmienne losowe $U, U - V$ są niezależne?

Zadanie 8. Niech K będzie zmienną losową taką, że $P(K = k) = \frac{1}{10}$ dla $k = 1, 2, \dots, 10$. Niech

$$X_k = \begin{cases} 1, & K = k, \\ 0, & K \neq k. \end{cases}$$

Sprawdzić, czy zmienne losowe X_1 i S_6 są niezależne, gdzie $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Czy niezależne są X_1 i S_3 ?

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d (tzn. niezależne i mają ten sam rozkład, od ang. *independent and identically distributed*) takie, że $X_1 \sim Exp(1)$. Rozważmy zmienne losowe $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ oraz $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Wyznacz gęstość rozkładu wektora losowego (U, V) .

Zadanie 10. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona odpowiednio z parametrami a, b . Wykazać, że $X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $a + b$.

Zadanie 11. Korzystając z pojęcia splotu wyznaczyć gęstość sumy niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym $U(-1, 1)$.

Zadanie 12. Niech zmienne losowe X, Y, Z będą niezależne o tym samym rozkładzie wykładniczym $Exp(\lambda)$. Korzystając z pojęcia splotu wyznaczyć gęstość zmiennych losowych $X + Y$ oraz $X + Y + Z$.

Zadanie 13. Niech $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3$ oraz $Y \sim U(0, 1)$ (rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$). Załóżmy, że X oraz Y będą niezależne. Znajdź rozkład $Z = XY$ i naszkicuj jego dystrybucję.

Zadanie 14. Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ mają ten sam rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa $P(X_i = k) = (1 - p)p^k, k = 0, 1, \dots, p \in (0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X_1 + \dots + X_n$.