

**Zadanie 1.** Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne o tym samym rozkładzie dwupunktowym

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0).$$

Niech  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . Udowodnij, że  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)$  ma asymptotyczny rozkład normalny  $AN(\mu_n, \sigma_n^2)$  oraz podaj postać ciągów  $\mu_n$  oraz  $\sigma_n^2$ .

**Zadanie 2.** Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na  $[0, 1]$ . Sprawdź ciąg zmiennych losowych

$$Z_n = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$$

ma asymptotyczny rozkład normalny.

**Zadanie 3.** Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne i mają ten sam rozkład oraz  $\mathbb{E}X_1 = 0$ ,  $\text{Var}X_1 = 1$ . Udowodnij, że

$$\frac{\sqrt{n}(X_1 + \dots + X_n)}{X_1^2 + \dots + X_n^2} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

**Zadanie 4.** Załóżmy, że  $X_n \sim AN(n, 2n)$ . Pokaż, że

$$\frac{n-1}{n} X_n \sim AN(n, 2n) \quad \text{oraz} \quad \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} X_n \not\sim AN(n, 2n).$$

**Zadanie 5.** Zmienna losowa  $X_n$  ma rozkład  $\chi^2(n)$ . Udowodnij, że

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \rightarrow N(0, 1)$$

według rozkładu.