

Zadanie 1. Wyprowadzić wzory na wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu

- (a) dwumianowego,
- (b) Poissona.

Zadanie 2. Niech X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Dla jakich λ istnieje wartość oczekiwana zmiennej losowej $X!$.

Zadanie 3. Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ mają ten sam rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa $P(X_i = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \dots$, $p \in (0, 1)$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $X_1 + \dots + X_n$.

Zadanie 4. W dużym lotku losowanych jest 6 kul z 49. Wyznacz wartość oczekiwaną liczby kul, które zostały wylosowane dokładnie raz w pięciu kolejnych losowaniach.

Zadanie 5. Każda ze zmiennych losowych X, Y przyjmuje tylko dwie wartości. Wykazać, że wówczas z równości $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ wynika niezależność X i Y .

Zadanie 6. Wyprowadzić wzory na wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu

- (a) jednostajnego na odcinku (a, b) ,
- (b) wykładniczego,
- (c) normalnego.

Zadanie 7. O ile istnieje, obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie zadany gęstością $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = \sin(X)$.

Zadanie 9. Udowodnij, że jeśli $\text{Var}(X) = 0$, to $P(X = a) = 1$ dla pewnego a .

Zadanie 10. Na odcinku $(0, 1)$ losujemy punkt zgodnie z rozkładem jednostajnym, dzieląc ten odcinek na dwa pododcinki o długościach różnych z prawdopodobieństwem jeden. O ile istnieje, to obliczyć wartość oczekiwaną

- (a) stosunku długości odcinka krótszego do długości odcinka dłuższego,
- (b) stosunku długości odcinka dłuższego do długości odcinka krótszego.

Zadanie 11. Aleksander chce sprzedać samochód. Postanowił, że sprzeda samochód pierwszej osobie, która zaoferuje cenę przynajmniej 10000 PLN. Zakładając, że kolejne oferty są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 5000 PLN wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby ofert poprzedzających ofertę sprzedaży.

Zadanie 12. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $\lambda > 0$. Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej losowej $\lfloor X \rfloor$.

Zadanie 13. Na okręgu o promieniu 1 wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty. Oblicz wartość oczekiwaną odległości między nimi (wzdłuż cięciwy).

Zadanie 14. Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X , której rozkład jest zadany przez dystryduantę:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{3}{4}, & x \in [0, 1), \\ 1 - e^{-x \log 4}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Uwaga! $\log$ oznacza logarytm naturalny.