

Zadanie 1. Niech (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny. Sprawdzić, czy

$$X, Y \text{ są niezależne} \iff X, Y \text{ są nieskorelowane.}$$

Zadanie 2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstością

$$f(x, y) = c \exp \left(-x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy \right).$$

Wyznaczyć stałą c . Obliczyć wariancję zmiennej losowej $Z = 4Y - X$.

Zadanie 3. Wektor losowy (X, Y, Z) ma gęstość postaci

$$f(x, y, z) = C \exp \left(-\frac{1}{120} (16(x-2)^2 + 15y^2 + 16(z+2)^2 + 8(x-2)(z+2)) \right).$$

Wyznaczyć C . Pokazać, że zmienne losowe $U = Y + Z$ oraz $V = 4X + Z$ są niezależne. Obliczyć $P(U > -2 - \sqrt{8})$.

Zadanie 4. Rozważamy zmienną losową (X, Y, Z) o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną $(0, 0, 2024)$ oraz macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 4 & 1,5 & 1 \\ 1,5 & 2 & 0,5 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponadto rozważmy zmienną losową $V = X + bY + cZ$, która jest niezależna z (Y, Z) . Wyznaczyć parametry a, b, c . Ponadto policzyć $\mathbb{E}V$ oraz $\text{Var}(V)$.