

$$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta r^2} = -4\pi r_i n_i + O(\Delta r^2)$$

najprostszy iloraz drugiej pochodnej
produkuje przepis z błędem lokalnym rzędu 4
całkiem nieźle, ale:

$$f_{i+1} = 2f_i - f_{i-1} - 4\pi\Delta r^2 r_i n_i + O(\Delta r^4)$$

można lepiej = metoda Numerowa
błąd lokalny rzędu 6

metoda Numerowa:

[przepis na kolejne wartości rozwiązania liczone
z błędem $O(\Delta x^6)$ zamiast $O(\Delta x^4)$]:

Stosowana do równania typu:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + g(x)y = S(x)$$

[równanie liniowe II rzędu, bez pierwszej pochodnej]

równanie traktowane
metodą Numerowa:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + g(x)y = S(x)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -4\pi n$$

oryginalne równanie Poissona

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = -4\pi n$$

występuje pochodna – nie podejmiemy
Numerowem

sprowadzone do wersji odpowiedniej dla Numerowa przez podstawienie

$$\phi(r) = \frac{f(r)}{r}$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = -4\pi r n$$

Metoda Numerowa – wyprowadzenie:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = S(x) - g(x)u(x)$$

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x) &= u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{\Delta x^5}{120} \frac{d^5 u}{dx^5} + O(\Delta x^6) \\ u(x-\Delta x) &= u(x) - \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{\Delta x^5}{120} \frac{d^5 u}{dx^5} + O(\Delta x^6) \\ u(x+\Delta x) + u(x-\Delta x) &= 2u(x) + \frac{2\Delta x^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2\Delta x^4}{24} \frac{d^4 u}{dx^4} + O(\Delta x^6) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{u(x+\Delta x) + u(x-\Delta x) - 2u(x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{d^4 u}{dx^4} + O(\Delta x^4)$$

druga pochodna prawej strony
równania różniczkowego

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u}{dx^4} &= \frac{S(x+\Delta x) + S(x-\Delta x) - 2S(x)}{\Delta x^2} \\ &\quad - \frac{g(x+\Delta x)u(x+\Delta x) + g(x-\Delta x)u(x-\Delta x) - 2g(x)u(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

po wstawieniu wyżej błąd pozostanie rzędu 4

$$\begin{aligned} & \frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \left[\frac{S(x + \Delta x) + S(x - \Delta x) - 2S(x)}{\Delta x^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{g(x + \Delta x)u(x + \Delta x) + g(x - \Delta x)u(x - \Delta x) - 2g(x)u(x)}{\Delta x^2} \right] + O(\Delta x^4) \\ & = S(x) - g(x)u(x) \end{aligned}$$

Obustronnie mnożymy przez Δx^2 , grupujemy wyrazy

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\Delta x^2}{12}g(x + \Delta x)\right) u(x + \Delta x) - 2 \left(1 - \frac{5\Delta x^2}{12}g(x)\right) u(x) + \left(1 + \frac{\Delta x^2}{12}g(x - \Delta x)\right) u(x - \Delta x) \\ & = \frac{\Delta x^2}{12} (S(x + \Delta x) + 10S(x) + S(x - \Delta x)) + O(\Delta x^6) \end{aligned}$$

Podstawowa formuła metody Numerowa

wykorzystać – można na podobnie wiele sposobów

tak - jak iloraz centralny drugiej pochodnej:

np. problem brzegowy – z relaksacją

lub jak problem początkowy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + g(x)y = S(x)$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = -4\pi r n$$

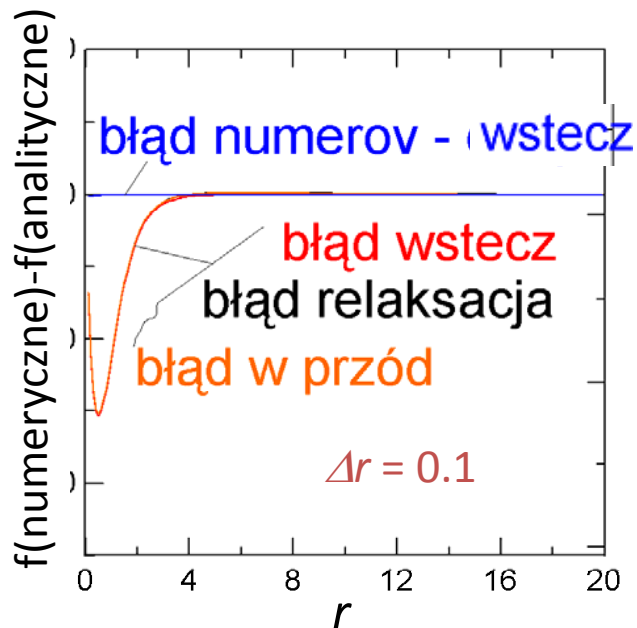
W naszym przykładzie: $g=0$, $S = -4\pi r n$

Metoda Numerowa wstecz:

$$f_{i-1} = \frac{\Delta r^2}{12} (S_{i+1} + 10S_i + S_{i-1}) + 2f_i - f_{i+1} + O(\Delta r^6)$$

Dyskretyzacja bezpośrednia:

$$f_{i-1} = \Delta r^2 S_i + 2f_i - f_{i+1} + O(\Delta r^4)$$

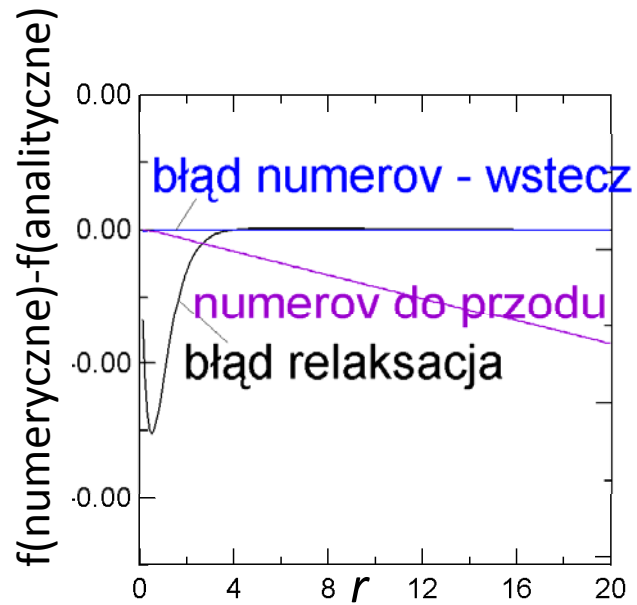


cała różnica w sposobie uwzględniania
niejednorodności (źródło)

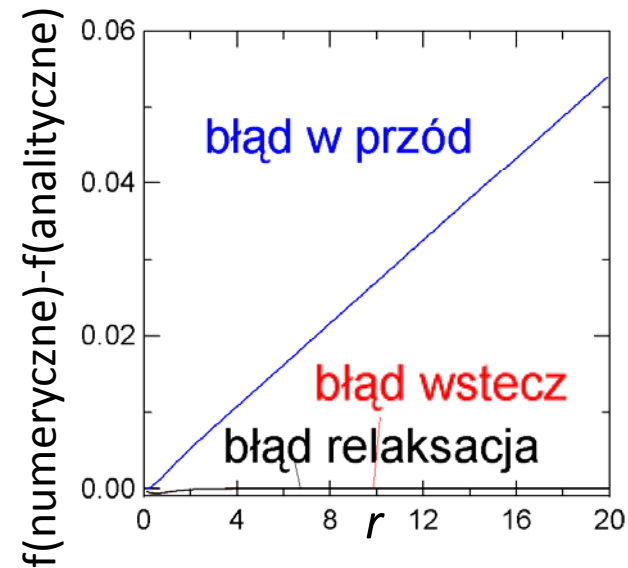
Przy tym samym skoku siatki
błąd Numerowa jest zanedbywalny w porównaniu
z błędem dyskretyzacji bezpośredniej.

$S(n)$ – wzywane trzykrotnie,
lecz można stabilizować,
złożoność obliczeniowa nie rośnie

metoda Numerowa w całkowaniu do przodu z analitycznym f_1



Przypominam wynik przy podejściu poprzednim:



Błąd jest podobnego pochodzenia (numeryczne $\leftrightarrow$ analityczne) i podobnego charakteru (liniowy z r) ale znacznie mniejszy
(błąd popełniony przez Numerowa w obszarze gdzie n nie znika – znacznie mniejszy)

Nie każde równanie różniczkowe zwyczajne można rozwiązać metodą Numerowa, ale każde można *w sposób ścisły* sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu np:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = S(x) - g(x)u(x)$$



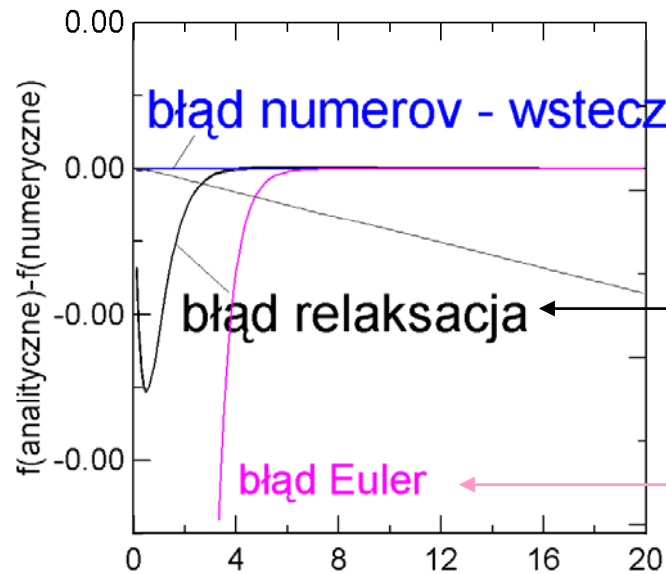
$$\frac{du}{dx} = v$$

$$\frac{dv}{dx} = S(x) - g(x)u(x)$$

Rozwiązywać takie układy równań już potrafimy

rozwiązujemy wstecz: $f(\text{duże } x) = -1$, $df/dx(\text{duże } x) = 0$

Równanie drugiego rzędu a układ równań pierwszego rzędu : dokładność



centralny iloraz różnicowy drugiej pochodnej

Euler: dyskretyzacja pierwszej pochodnej
po sprowadzeniu równania drugiego rzędu
do układu dwóch równań rzędu pierwszego
całkowany wstecz

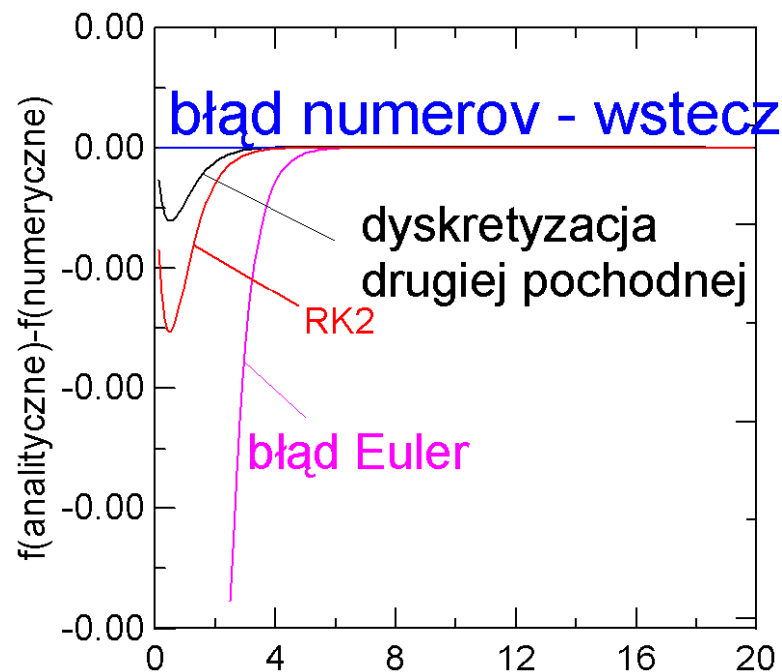
Euler $O(\Delta x^2)$

metoda z centralnym iloraz różnicowy drugiej pochodnej $O(\Delta x^4)$

Numerow $O(\Delta x^6)$

Redukcja rzędu równania przez sprowadzenie
do układu równań pierwszego rzędu ma swoją cenę.

Jak spisuje się RK2 ?



Euler $O(\Delta x^2)$

RK2 $O(\Delta x^3)$

Dyskretyzacja drugiej pochodnej
 $O(\Delta x^4)$

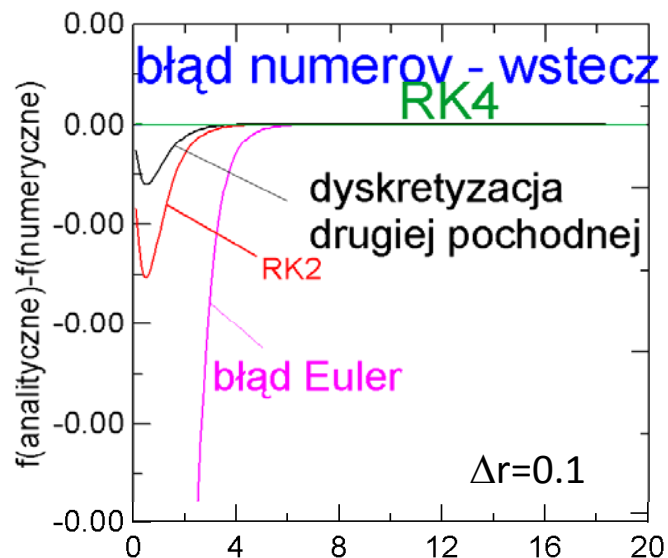
Numerow $O(\Delta x^6)$

Znacznie lepiej niż Euler, ale wciąż gorzej niż dyskretyzacja drugiej pochodnej.

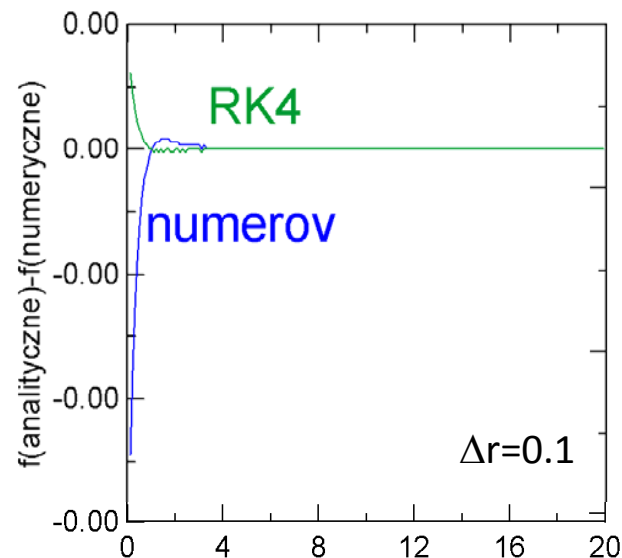
RK4: $O(\Delta x^5)$

Numerow $O(\Delta x^6)$

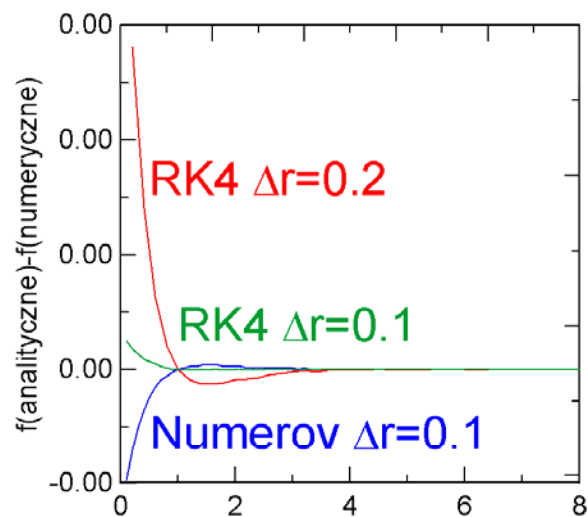
Dokładność bliska Numerowa



a nawet lepsza



Nieco słabsza od Numerowa, gdy
wziąć poprawkę na wzywanie
prawej strony w punktach pośrednich:



Przykład był nietypowy:

dla prawego brzegu: mogliśmy zadać
w sposób dokładny (analitycznie i numerycznie)
wartość rozwiązania w kroku ostatnim i przedostatnim.

W praktyce:

rzadko tak jest: rozwiązując problem brzegowy
metodami dla problemu początkowego
– musimy wyznaczyć wartość w punkcie
sąsiednim do brzegowego) – **metoda strzałów**

metoda strzałów dla dwupunktowych problemów brzegowych (zastosowanie metod do problemu początkowego)

... rozwiązanie problemu brzegowego przy pomocy metod dedykowanych do zagadnienia początkowego

istota metody: parametryzacja rozwiązań przy pomocy dodatkowego wb na jednym z końców
+ wybór parametru, który daje spełnienie prawego wb.

rozważmy 2-punktowy nieliniowy problem brzegowy drugiego rzędu

$$u''(x) = f(x, u, u') \quad \left| \quad a < x < b \quad \right| \quad \begin{cases} u(a) = A \\ u(b) = B \end{cases}$$

stowarzyszony problem początkowy:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) & y_1(a) &= A \\ y_2'(x) &= f(x, y_1, y_2) & y_2(a) &= \alpha \end{aligned}$$

w metodzie strzałów kluczowa zależność od swobodnego parametru α

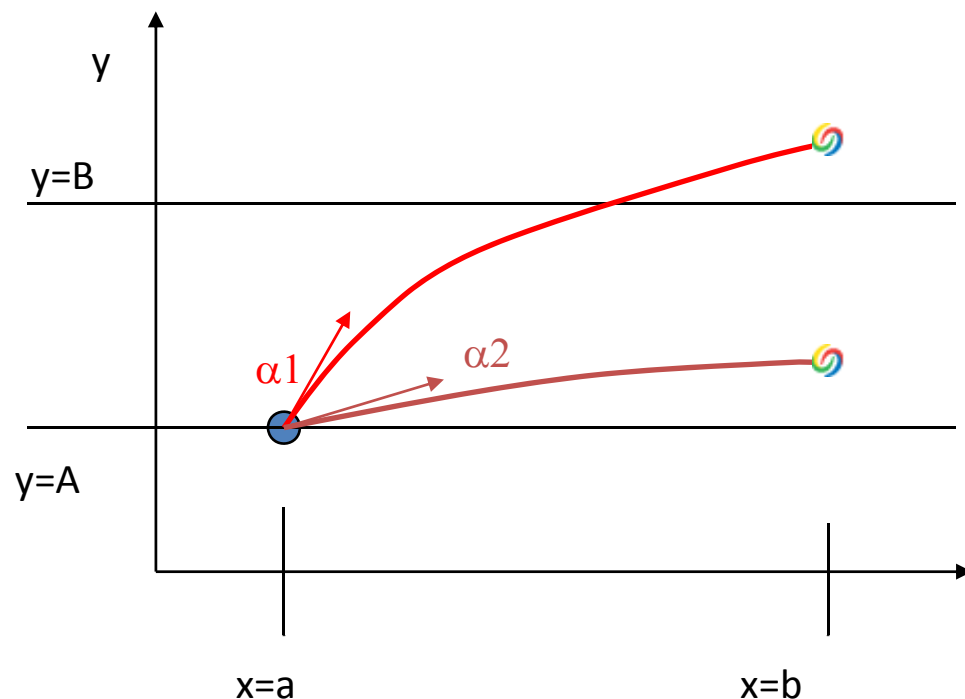
$$y_k(x) = y_k(x; \alpha)$$

rozwiązywać będziemy problem początkowy szukając takiej wartości parametru swobodnego aby

$$y_1(b; \alpha) = B$$

problem sprowadza się do rozwiązania nieliniowego równania na α

metoda strzałów



$$y_1'(x) = y_2(x)$$

$$y_2'(x) = f(x, y_1, y_2)$$

$$y_1(a) = A$$

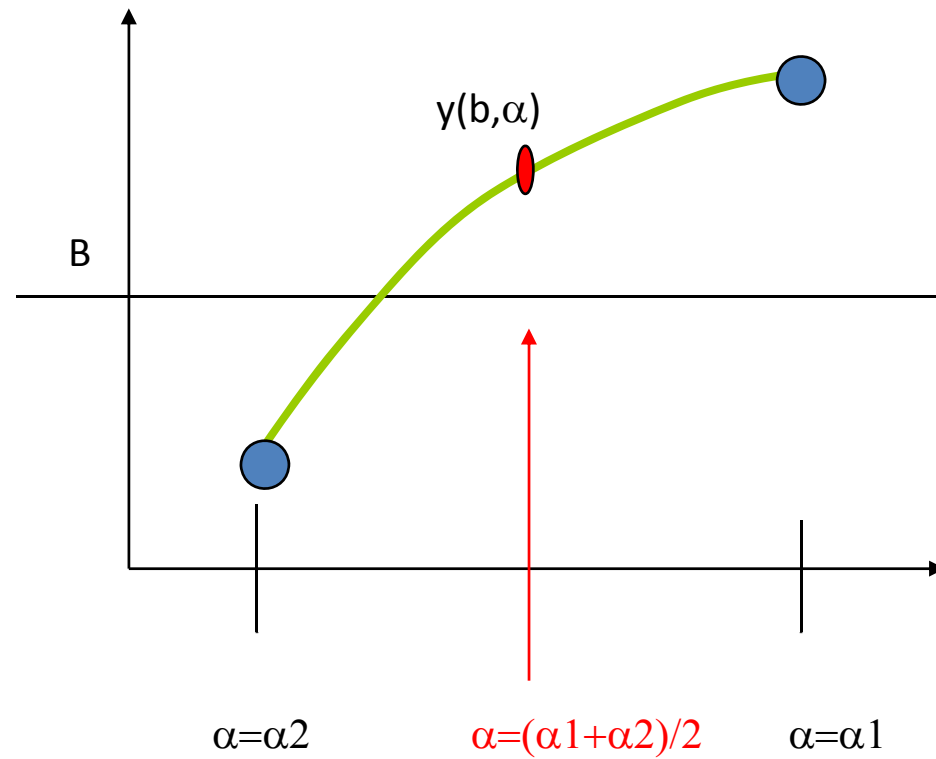
$$y_2(a) = \alpha$$

$$y_1(b; \alpha) = B$$

na rysunku: musimy trafić z pochodną w $x=a$ tak aby na końcu nasz „pocisk” trafił w $y=B$ (stąd nazwa metody)

$y_1(b; \alpha)$ zależy w sposób ciągły od α .
tutaj: α_1 za duża α_2 zbyt mała

metoda strzałów

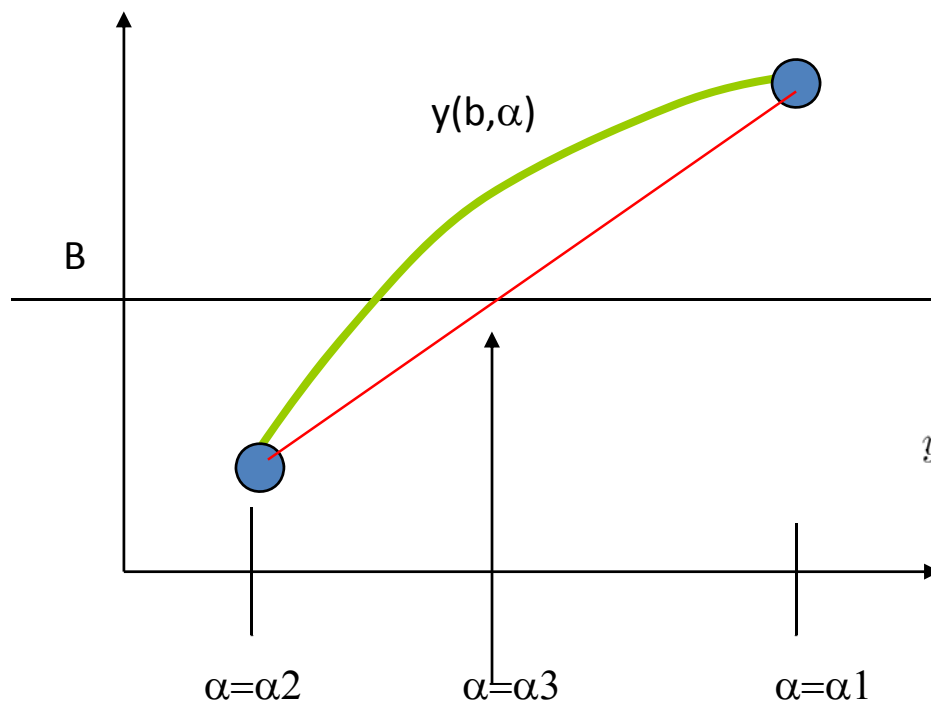


$$y_1(b; \alpha) = B$$

można rozwiązać **bisekcją**: wyliczyć $y_1(b; (\alpha_1 + \alpha_2)/2)$
i zawęzić przedział poszukiwania zera

kończymy gdy przedział wystarczająco zawężony

metoda strzałów



$$y_1(b; \alpha) = B$$

od bisekcja lepsza **metoda siecznych**
zakładamy, że $y(b, \alpha)$ jest liniowa
w okolicy α_1, α_2 prowadzimy interpolację :

$$y(b, \alpha) = y(b, \alpha_1) \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + y(b, \alpha_2) \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

B powinno znajdować się w

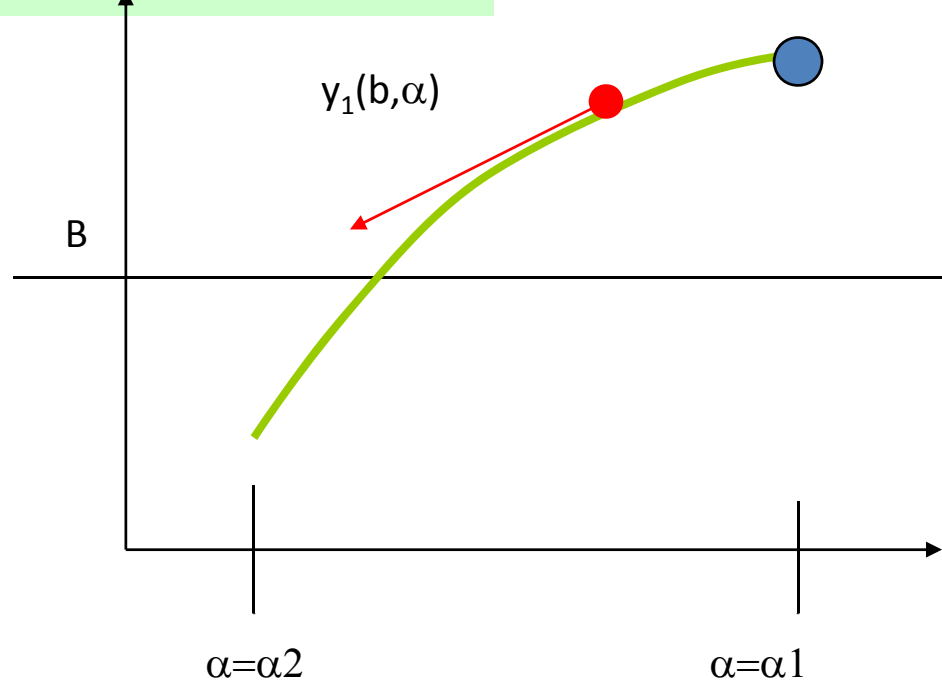
$$\alpha_3 \equiv \alpha := \frac{\alpha_2 y(b; \alpha_1) - \alpha_1 y(b; \alpha_2) + B(\alpha_1 - \alpha_2)}{y(b; \alpha_1) - y(b; \alpha_2)}$$

kończymy np., gdy $|y(b, \alpha_3) - B| < \varepsilon$

możliwe użycie zamiast prostej: wielomianu interpolacyjnego stopnia 2

metoda strzałów z iteracją
Newtona

$$y_1(b; \alpha) - B = 0$$



można metodą Newtona

$$\alpha^{\mu+1} = \alpha^{\mu} - \frac{y_1(b; \alpha^{\mu}) - B}{\frac{\partial y_1(b; \alpha^{\mu})}{\partial \alpha^{\mu}}}$$

potrzebna pochodna po α
jak wyznaczyć:

zbieżność Newtona / siecznych

zbieżność Newtona (zazwyczaj):

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\infty}| \leq C |\alpha_{\nu} - \alpha_{\infty}|^2, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

kwadratowa, ale wykonanie każdego kroku
wymaga rozwiązania dodatkowego problemu początkowego

zbieżność siecznych:

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\infty}| \leq C |\alpha_{\nu} - \alpha_{\infty}|^{1.5}, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

wolniejsza ale tańsza iteracja

bisekcja:

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\infty}| \leq C |\alpha_{\nu} - \alpha_{\infty}|^1$$

wolniejsza,
ale nie tańsza od siecznych
sensowne użycie, gdy nieróżniczkowalna
zależność od parametru swobodnego

**metoda strzałów z iteracją
Newtona**

$$\alpha^{\mu+1} = \alpha^{\mu} - \frac{y_1(b; \alpha^{\mu}) - B}{\frac{\partial y_1(b; \alpha^{\mu})}{\partial \alpha^{\mu}}} \quad \swarrow \text{wyznaczyć}$$

$y_1'(x) = y_2(x)$	$y_1(a) = A$
$y_2'(x) = f(x, y_1, y_2)$	$y_2(a) = \alpha$

różniczkujemy po α

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{d}{dx} y_1(x; \alpha) = \frac{d}{d\alpha} y_2(x; \alpha)$$

$$z_1 = \frac{dy_1}{d\alpha} \quad z_1(a) = 0$$

nazywamy:

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{d}{dx} y_2(x; \alpha) = \frac{d}{d\alpha} f(x, y_1, y_2)$$

$$z_2 = \frac{dy_2}{d\alpha} \quad z_2(a) = 1$$

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{dy_1} \frac{dy_1}{d\alpha} + \frac{df}{dy_2} \frac{dy_2}{d\alpha} \quad \longrightarrow \quad \frac{df}{d\alpha} = z_1 \frac{df}{dy_1} + z_2 \frac{df}{dy_2}$$

metoda strzałów z iteracją Newtona

$$\alpha^{\mu+1} = \alpha^{\mu} - \frac{y_1(b; \alpha^{\mu}) - B}{\frac{\partial y_1(b; \alpha^{\mu})}{\partial \alpha^{\mu}}} \quad \leftarrow \text{wyznaczyć}$$

$$\begin{array}{ll} y_1'(x) &= y_2(x) & y_1(a) &= A \\ y_2'(x) &= f(x, y_1, y_2) & y_2(a) &= \alpha \end{array}$$

różniczkujemy po α

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{d}{dx} y_1(x; \alpha) = \frac{d}{d\alpha} y_2(x; \alpha)$$

$$z_1 = \frac{dy_1}{d\alpha}$$

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{d}{dx} y_2(x; \alpha) = \frac{d}{d\alpha} f(x, y_1, y_2)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = z_1 \frac{df}{dy_1} + z_2 \frac{df}{dy_2}$$

$$z_2 = \frac{dy_2}{d\alpha}$$

$$\frac{d}{dx} z_1(x; \alpha) = z_2(x; \alpha)$$

$$z_1(a) = 0$$

$$\frac{d}{dx} z_2(x; \alpha) = z_1 \frac{df}{dy_1} + z_2 \frac{df}{dy_2}$$

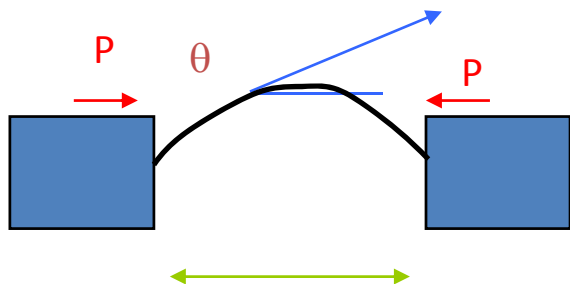
$$z_2(a) = 1$$

stowarzyszony
problem początkowy
do rozwiązania w funkcji x

$z_1(x=b, \alpha)$ da nam
mianownik do metody
Newtona

przykład: pręt w imadle (*clamped elastica*)

pręt jednostkowej długości jest zamocowany sztywno pod zadaniem kątem w imadle które zaciskają się z obciążeniem P.



$\theta(s)=?$ s -współrzędna położenia wzdłuż pręta dla pręta jednostkowej długości $0 < s < 1$

znamy kąt $\theta(0)=\beta$, $\theta(1)=-\beta$, Z warunków symetrii: $\theta(1/2)=0$

z teorii elastyczności: $\frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin(\theta) = 0$ (problem nieliniowy)

poszukujemy: 1) kształtu pręta i co za tym idzie 2) rozstawienia szczęk imadła

przygotujemy problem do metody strzałów z metodą Newtona:

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & \theta \\ y_2 & = & \theta' \end{array} \xrightarrow{\text{równania}} \begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & -P \sin(y_1) \end{array}$$

z wp

równanie nieliniowe do rozwiązania:

$$y_1(1/2, \alpha) = 0$$

zadane $\longrightarrow y_1(0; \alpha) = \beta$

parametr do wyznaczenia $\longrightarrow y_2(0; \alpha) = \alpha$

$$\alpha^{\mu+1} = \alpha^{\mu} - \frac{y_1(1/2; \alpha^{\mu})}{\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}(1/2; \alpha^{\mu})}$$

przygotujmy problem do metody strzałów z metodą Newtona:

$$\begin{array}{llll} y_1' & = & y_2 & y_1(0; \alpha) & = & \beta \\ y_2' & = & -P \sin(y_1) & y_2(0; \alpha) & = & \alpha \end{array} \quad y_1(1/2, \alpha) = 0$$

$$\alpha^{\mu+1} = \alpha^{\mu} - \frac{y_1(1/2; \alpha^{\mu})}{\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}(1/2; \alpha^{\mu})}$$

$$z_1 = \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} \quad z_2 = \frac{\partial y_2}{\partial \alpha}$$

pochoďna problemu początkowego po α

$$\begin{array}{ll} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & -P \cos(y_1) z_1 \end{array}$$

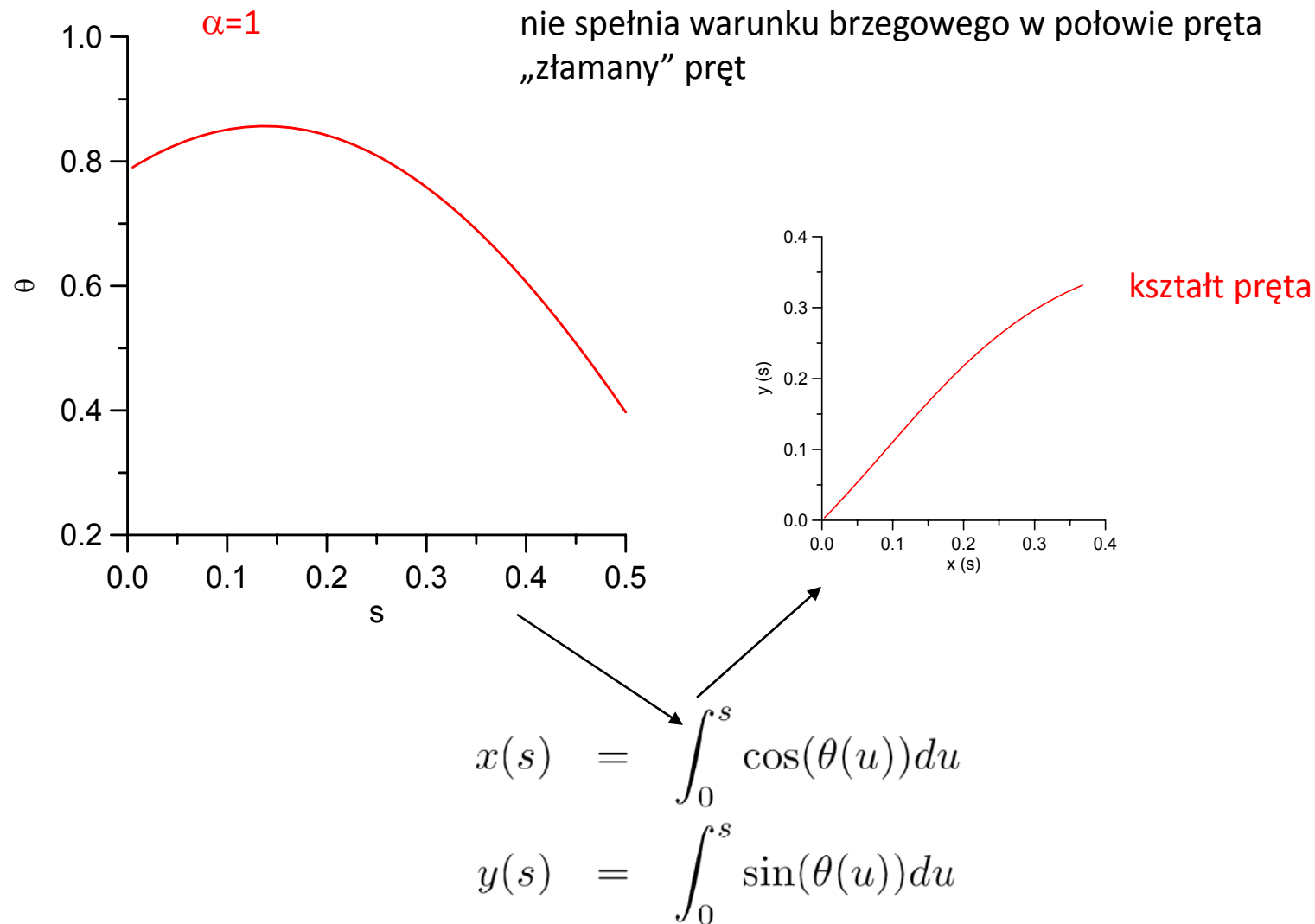
$$\begin{array}{ll} z_1(0; \alpha) & = & 0 \\ z_2(0; \alpha) & = & 1 \end{array}$$

$$\alpha^{\mu+1} = \alpha^{\mu} - \frac{y_1(1/2; \alpha^{\mu})}{z_1(1/2; \alpha^{\mu})}$$

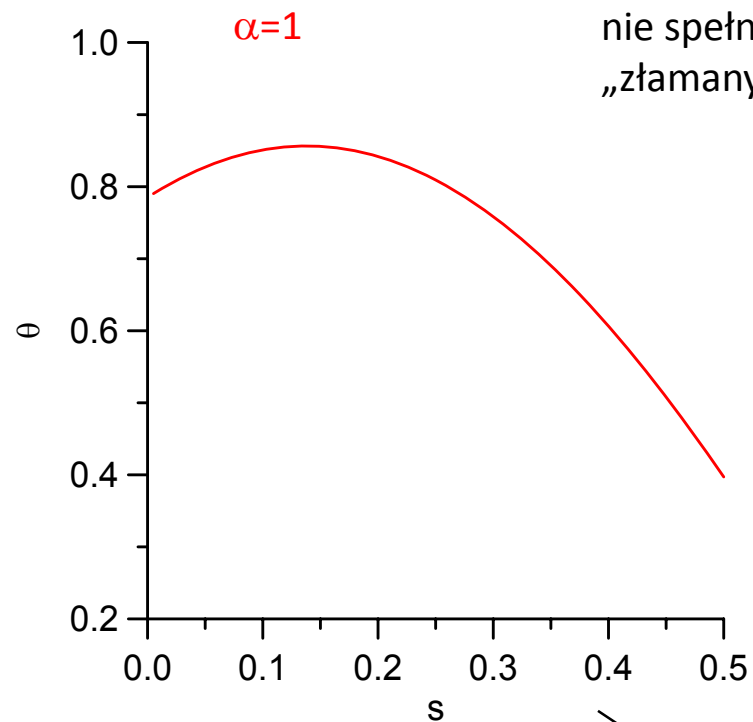
kolejność działań:

- 1) rozwiązujemy problem na y : licznik
- 2) do wyliczenia mianownika
rozwiązujemy problem na z :
[z_2' wykorzystuje policzone w 1) y_1]
- 3) znajdujemy poprawione α

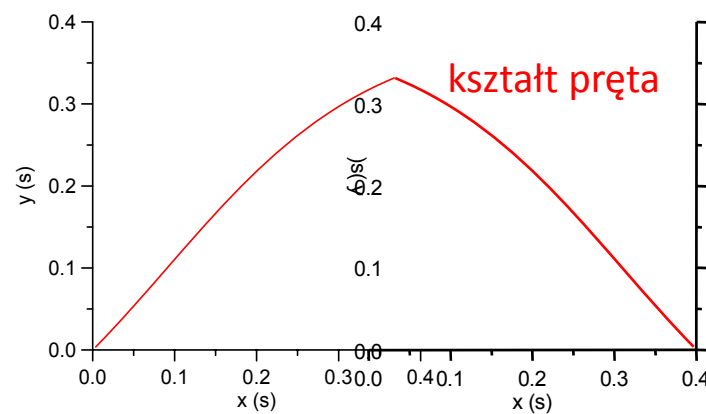
zaciśnięty pręt $\beta=\pi/4$, na starcie pochodna kąta θ po s : $\alpha=1$, $P=10$,
obydwa problemy początkowe rozwiązane jawnym schematem Eulera z $ds=0.5/100$



zaciśnięty pręt $\beta=\pi/4$, na starcie pochodna kąta θ po s : $\alpha=1$, $P=10$,
 problemy własne rozwiązane jawnym schematem Eulera z $ds=0.5/100$



nie spełnia warunku brzegowego w połowie pręta
 „złamany” pręt



$$x(s) = \int_0^s \cos(\theta(u)) du$$

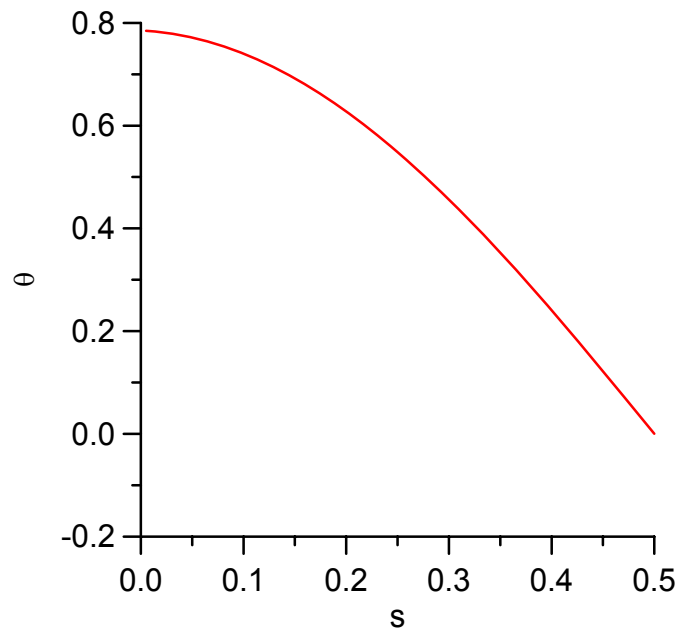
$$y(s) = \int_0^s \sin(\theta(u)) du$$

iteracja Newtona

	α	$\theta(1/2, \alpha)$
1	1.000000	0.3970441
2	-0.8177086E-01	0.1302912E-01
3	-0.1195772	0.1138412E-04
4	-0.1196103	0.8602074E-11
5	-0.1196103	-0.3694961E-15
6	-0.1196103	-0.4510281E-16
7	-0.1196103	0.6591949E-16

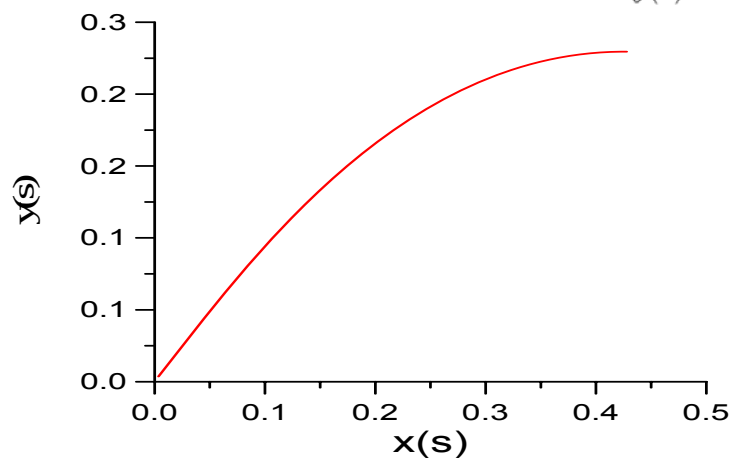
znaleźliśmy wartość parametru
 α która daje
 właściwy kształt pręta

możemy teraz sobie odległość
 między szczękami wyliczyć



$$x(s) = \int_0^s \cos(\theta(u)) du$$

$$y(s) = \int_0^s \sin(\theta(u)) du$$



b) metoda różnic skończonych

nadal problem nieliniowy 2-go rzędu
z warunkiem Dirichleta

$$u''(x) = f(x, u, u') \quad a < x < b$$

$$u(a) = A$$

$$u(b) = B$$

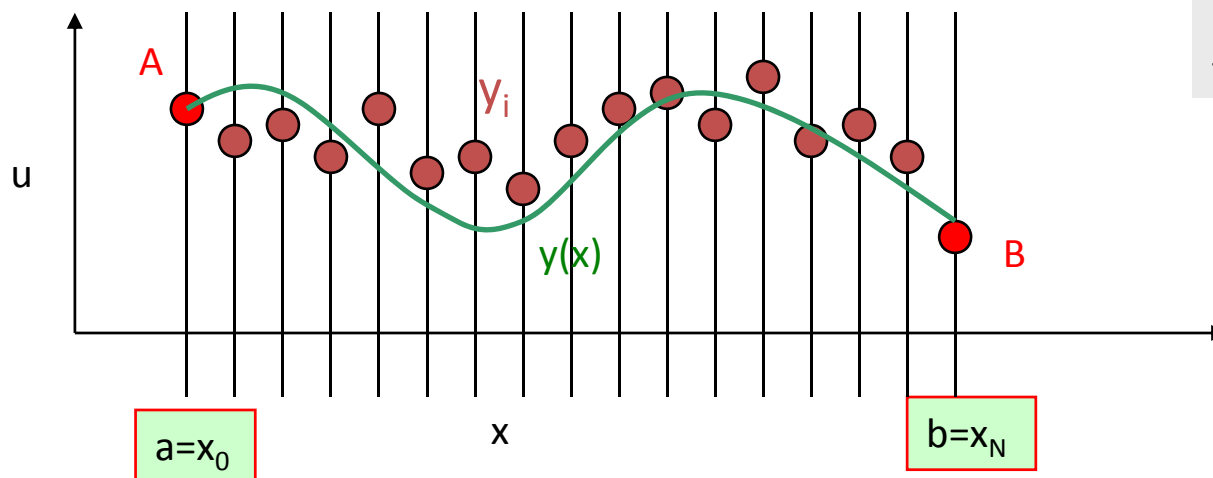
przedział (a, b) dzielimy na siatkę, powiedzmy o stałym kroku:

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

punkty siatki:

$$x_i = a + \Delta x i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

w metodzie strzałów
używamy metod dla
problemu początkowego,
możemy sobie pozwolić
na adaptację kroku itd.
- w MRS raczej nie.



b) metoda różnic skończonych

$$u''(x) = f(x, u, u')$$

zastępujemy pochodne **ilorazami różnicowymi** – problem różniczkowy sprowadzony do algebraicznego

wykorzystujemy rozwinięcie Taylora:

$$u(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \frac{d^k u(x)}{dx^k}$$

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots$$

← pamiętamy, że całą obciętą sumę można zastąpić wyrażeniem z k-tą pochodną policzoną gdzieś w przedziale $(x, x+\Delta x)$

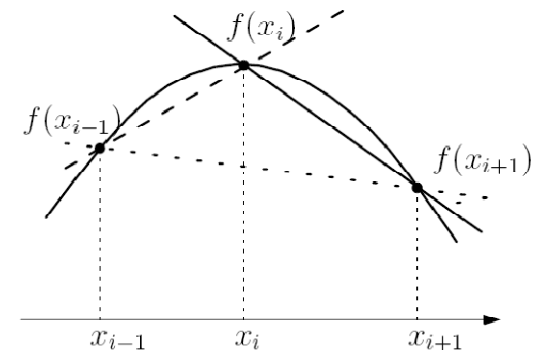
$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} u''(\xi)$$

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} u''(\xi)$$

dwupunktowy przedni i wsteczny
iloraz różnicowy pochodnej
(widzimy, że będą dokładne
dla wielomianów stopnia 1)

odjąć stronami r.T. (iloraz centralny, trójpunktowy)

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} u'''(\xi)$$



b) metoda różnic skończonych

$$\begin{aligned}u(x + \Delta x) &= u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} + \dots \\u(x - \Delta x) &= u(x) - \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} + \dots\end{aligned}$$

iloraz centralny drugiej pochodnej:

$$\frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{\Delta x^2} = u''(x) + \frac{\Delta x^2}{12} u^{iv}(\xi)$$

ilorazy, które poznaliśmy wystarczą aby rozwiązać problem modelowy:

$$u''(x) = f(x, u, u')$$

... lecz pozostaniemy jeszcze chwilę przy ilorazach

Wyższy iloraz różnicowy pierwszej pochodnej – wykorzystać więcej punktów

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^4) \quad (1)$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^4) \quad (2)$$

(1) minus (2) – zachowujemy wyrażenie z trzecią pochodną

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^3}{3} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^5) \quad (3)$$

$$u(x + 2\Delta x) = u(x) + 2\Delta x \frac{du}{dx} + 4 \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + 8 \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^4) \quad (4)$$

$$u(x - 2\Delta x) = u(x) - 2\Delta x \frac{du}{dx} + 4 \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - 8 \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^4) \quad (5)$$

(4) minus (5)

$$u(x + 2\Delta x) - u(x - 2\Delta x) = 4\Delta x \frac{du}{dx} + \frac{8}{3} \Delta x^3 \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^5) \quad (6)$$

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^3}{3} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^5) \quad (3)$$

$$u(x + 2\Delta x) - u(x - 2\Delta x) = 4\Delta x \frac{du}{dx} + \frac{8}{3}\Delta x^3 \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^5) \quad (6)$$

Wyrzucamy trzecią pochodną (6) minus 8 razy (3)

$$u(x+2\Delta x) - u(x-2\Delta x) - 8u(x+\Delta x) + 8u(x-\Delta x) = -12\Delta x \frac{du}{dx} + O(\Delta x^5)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{12\Delta x} (8u(x+\Delta x) - 8u(x-\Delta x) + u(x-2\Delta x) - u(x+2\Delta x)) + O(\Delta x^4)$$

wyższa dokładność – informacje z kolejnych sąsiadów $u(x)$

Analiza błędu ilorazu du/dx dla jednomianów $u(x)=x^k$ czyli co oznacza $O(\Delta x^N)$?

oznacza: $C \Delta x^N u^{(N+1)}(\xi)$

wyprowadzone

C=1/2

C=1/6

$u(x)$	$u'(x)$	$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$\frac{(8u(x + \Delta x) - 8u(x - \Delta x) + u(x - 2\Delta x) - u(x + 2\Delta x))/(12\Delta x) + O(\Delta x^4)}$
x	1	1	1	1
x^2	2x	$2x + \Delta x$	2x	2x
x^3	3x ²	$3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$	$3x^2 + \Delta x^2$	3x ²
x^4	4x ³	$4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3$	$4x^3 + 4x\Delta x^2$	4x ³
x^5	5x ⁴	$5x^4 + 10x^3\Delta x + 10x^2\Delta x^2 + 5x\Delta x^3 + \Delta x^4$	$5x^4 + 10x^2\Delta x^2 + \Delta x^4$	$5x^4 - 4\Delta x^4$

(błąd na czerwono)

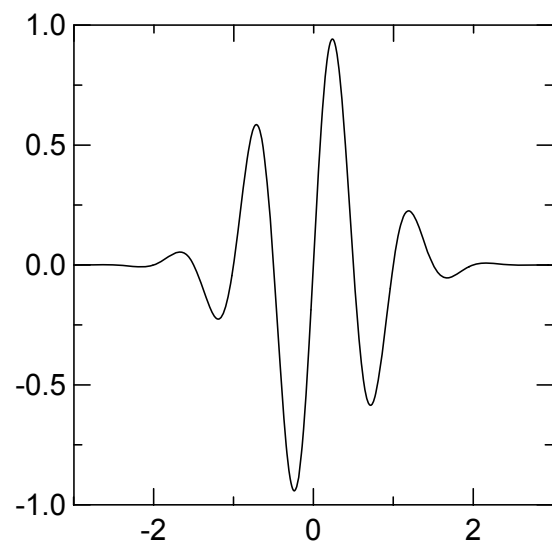
domyślamy się, że C= -1/30

$O(\Delta x^N)$ nie tylko podaje rząd zbieżności ilorazu do wartości dokładnej z Δx ,
lecz również oznacza, że iloraz jest dokładny dla różniczkowania wielomianów rzędu N .

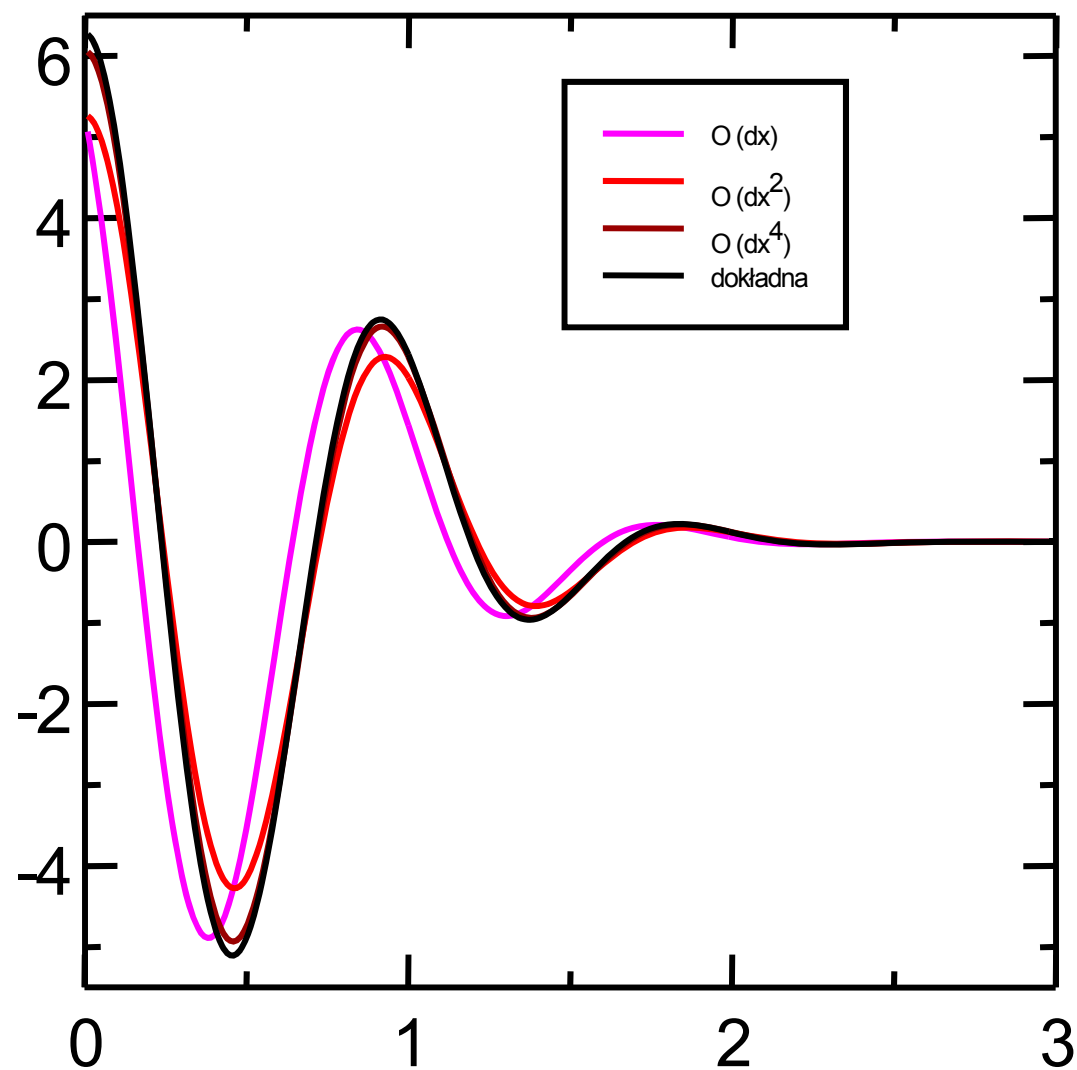
Metoda elementów skończonych = rozwiązanie lokalne dane
przez wielomianowe funkcje kształtu. Liczenie analityczne pochodnych
kłopotliwe, ale zbędne jeśli dobrać odpowiedni iloraz.

Przykład:

$$u(x) = \exp(-x^2) \sin(2\pi x)$$



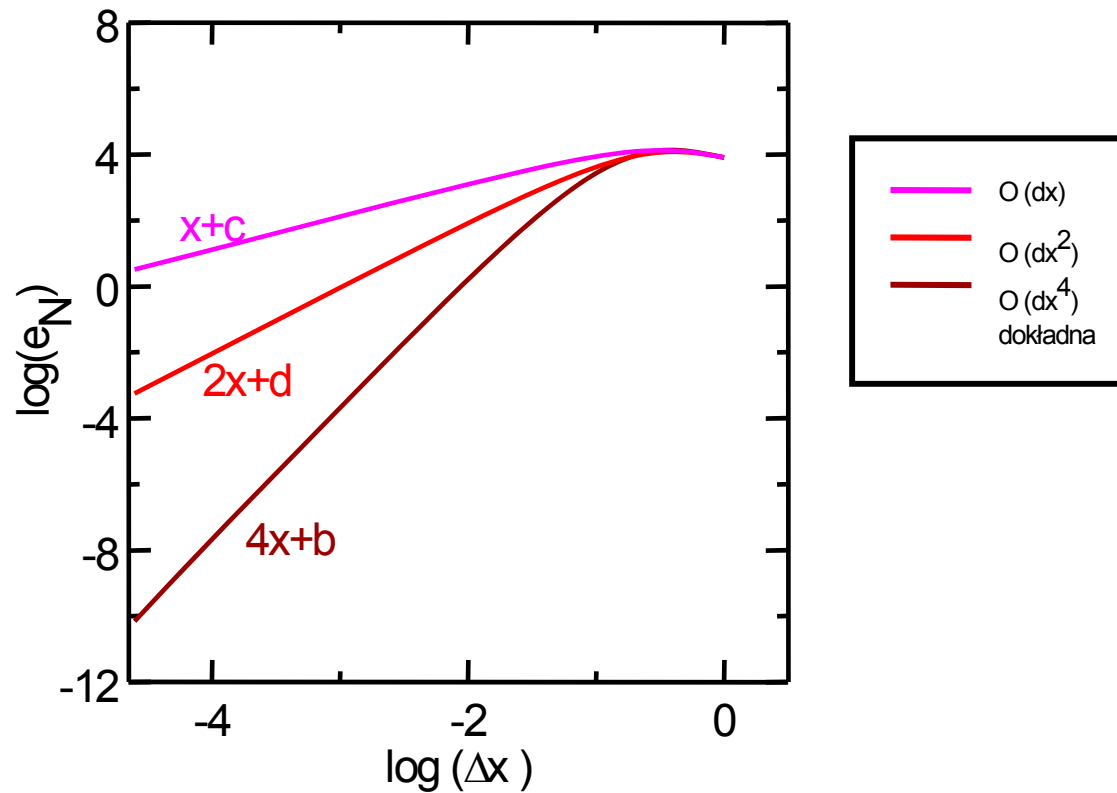
Pochodna dokładna i ilorazy dla $dx=0.15$



Zbieżność wartości pochodnej wyliczonej z ilorazu różnicowego do wartości dokładnej z $dx \rightarrow 0$.

$$e_N(\Delta x) = \sqrt{\sum_{i=-300}^{300} (u'(i \times dx) - v_N(\Delta x, i \times dx))^2}$$

$v_N(\Delta x, x)$ jest ilorazem różnicowym nominalnie rzędu $O(\Delta x^N)$



mamy dokładny wzór na pochodną!

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{12\Delta x} (8u(x + \Delta x) - 8u(x - \Delta x) + u(x - 2\Delta x) - u(x + 2\Delta x)) + O(\Delta x^4)$$



może wykorzystać wielopunktowy iloraz różnicowy do rozwiązania problemu Cauchy ?

$$u(n + 4) = 8u(n + 3) - 8u(n + 1) + u(n) - 12\Delta x f(n + 2)$$

$\rho(\zeta) = z^4 - 8z^3 + 8z - 1$	$\rho(1)=0$ $\rho'(1)-\sigma(1)=0$	spójny
$\sigma(\zeta) = -12z^2$		

zera : $z^4 - 8z^3 + 8z - 1 = 0$: $z=+1$ (główne), 0.12 (OK.), -1 (słabo stabilny), **7.87** ☹️

niestabilny

Ilorazy drugiej pochodnej

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^4) \quad (1)$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta x^4) \quad (2)$$

(1) plus (2) trójpunktowy iloraz drugiej pochodnej [pojawił się już wcześniej]

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Iloraz drugiej pochodnej $O(\Delta x^4)$

Rozpisujemy do Δx^6 bo będziemy musieli wydzielić przez Δx^2

$$u(x+2\Delta x) = u(x) + 2\Delta x \frac{du}{dx} + \frac{4\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{8\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{16\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} + \frac{32\Delta x^5}{120} \frac{d^5u}{dx^5} + O(\Delta x^6)$$

$$u(x-2\Delta x) = u(x) - 2\Delta x \frac{du}{dx} + \frac{4\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{8\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{16\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} - \frac{32\Delta x^5}{120} \frac{d^5u}{dx^5} + O(\Delta x^6)$$

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} + \frac{\Delta x^5}{120} \frac{d^5u}{dx^5} + O(\Delta x^6)$$

$$u(x-\Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} - \frac{\Delta x^5}{120} \frac{d^5u}{dx^5} + O(\Delta x^6)$$

Zadanie: zlikwidować piątą, czwartą i trzecią pochodną. Piątą i trzecią wyrzucimy dodając wzory parami

$$u(x+2\Delta x) + u(x-2\Delta x) = 2u(x) + \frac{8\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{32\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} + O(\Delta x^6)$$

$$u(x+\Delta x) + u(x-\Delta x) = 2u(x) + \frac{2\Delta x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2\Delta x^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} + O(\Delta x^6)$$

Drugą sumę przemnożyć przez 16, odjąć od tego pierwszą, wyliczyć drugą pochodną, wynik:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{16u(x+\Delta x) + 16u(x-\Delta x) - u(x+2\Delta x) - u(x-2\Delta x) - 30u(x)}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4)$$

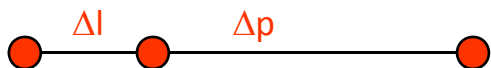
Wyższe ilorazy drugiej pochodnej cd.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=-N}^N c_n u(x + n\Delta x) + O(\Delta x^{2N})$$

N	c_0	$c_{\pm 1}$	$c_{\pm 2}$	$c_{\pm 3}$	$c_{\pm 4}$	$c_{\pm 5}$	$c_{\pm 6}$
1	-2	1					
2	-5/2	4/3	-1/12				
3	-49/18	3/2	-2/20	1/90			
4	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560		
5	-5269/1800	5/3	-5/21	5/126	-5/1008	1/3150	
6	-5369/1800	12/7	-15/56	10/189	-1/112	2/1925	-1/16632

ilorazy na nierównomiernej siatce

Iloraz różnicowy pochodnej dla nierównej siatki:



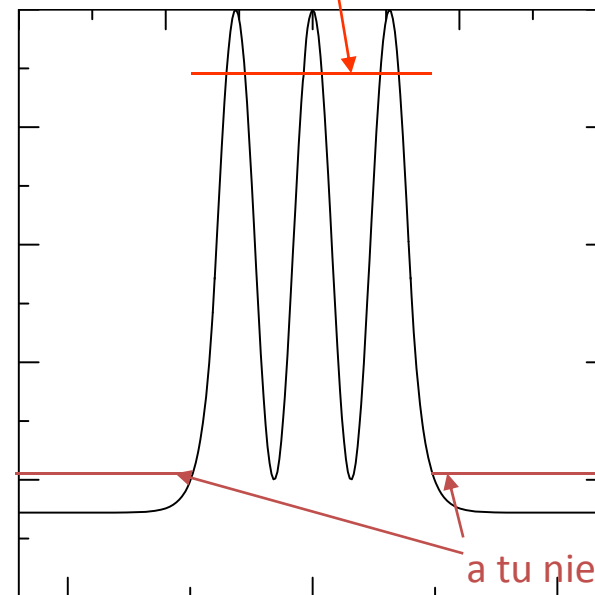
$$u(x + \Delta p) = u(x) + \Delta p \frac{du}{dx} + \frac{\Delta p^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta p^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta p^4)$$

$$u(x - \Delta l) = u(x) - \Delta l \frac{du}{dx} + \frac{\Delta l^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta l^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta l^4)$$

każdy z tych wzorów wygeneruje nam
iloraz pochodnej rzędu $O(\Delta x)$

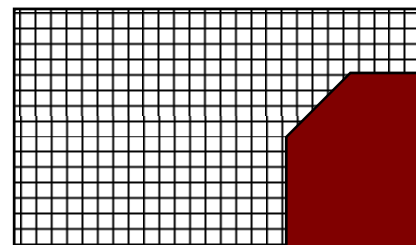
na siatce równomiernej potrafiliśmy wygenerować
iloraz $O(\Delta x^2)$ korzystając z obydwu sąsiadów
= wycinaliśmy wyrażenie z $u''(x)$ odejmując stronami
teraz się nie uda!

Tutaj dużo się dzieje
(gęstsza siatka przydałaby się)



a tu niewiele
(rzadsza
siatka wystarczy)

przydatne również:
2 i więcej D
brzezi nieregularne



Iloraz różnicowy drugiej pochodnej dla nierównej siatki:

$$u(x + \Delta p) = u(x) + \Delta p \frac{du}{dx} + \frac{\Delta p^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta p^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta p^4) \quad \times \Delta l$$

$$u(x - \Delta l) = u(x) - \Delta l \frac{du}{dx} + \frac{\Delta l^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta l^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta l^4) \quad \times \Delta p$$

dodać:
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l \Delta p (\Delta l + \Delta p)} + O(\Delta l - \Delta p)$$

Wzór trójpunktowy

tracimy jeden rząd
dokładności w porównaniu
z siatką równomierną

Metoda różnic skończonych działa najkorzystniej na równomiernej siatce.

Zazwyczaj nie stać nas (i nie tylko nas) na równomierną siatkę w 3D.

Często wyklucza to MRS w realnych zastosowaniach.

wracamy do metody RS

$$u(a) = A$$

$$u''(x) = f(x, u, u')$$

$$u(b) = B$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$x_i = a + \Delta x i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

problem algebraiczny:

$$\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2} = f\left(x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}\right) \quad \text{dla } i=1, \dots, N-1$$

$$u_0=A, u_N=B$$

problem jest zbyt ogólny dla rozważań wstępnych,
zauważmy uwagę do problemu liniowego:

$$u''(x) = -p(x)u'(x) - q(x)u(x) + r(x)$$

$$u''(x) = -p(x)u'(x) - q(x)u(x) + r(x) \quad u(a) = A$$

$$u(b) = B$$

wersja zdyskretyzowana:

$$\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2} + p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + q_i u_i - r_i = 0$$

$$\mathcal{L}u(x) = 0 \quad \text{równanie różniczkowe}$$

$$\mathcal{L}_{\Delta x} u_i = 0 \quad \text{jego przybliżenie algebraiczne}$$

błąd dyskretyzacji metody różnic skończonych w punkcie x_i (przypomnienie definicji dla RRZ)

$$\tau_i = \mathcal{L}_{\Delta x} u(x_i)$$

błąd dyskretyzacji w przypadku równania liniowego:

$$\tau_i = \frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{\Delta x^2} + p_i \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x} + q_i u(x_i) - r_i$$

szacujemy błąd dyskretyzacji

$$\tau_i = \frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{\Delta x^2} + p_i \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x} + q_i u(x_i) - r_i$$

wiedząc, że:

$$\frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{\Delta x^2} = u''(x) + \frac{\Delta x^2}{12} u^{iv}(\xi)$$

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} u'''(\xi)$$

$$\tau_i = u''(x_i) - \frac{\Delta x^2}{12} u^{iv}(\xi) + p(x_i) \left(u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{6} u'''(\xi_1) \right) + q(x_i)u(x_i) - r(x_i)$$

$$u''(x) = -p(x)u'(x) - q(x)u(x) + r(x)$$

$$\tau_i = \pm \frac{\Delta x^2}{12} u^{iv}(\xi) + p(x_i) \frac{\Delta x^2}{6} u'''(\xi_1)$$

użyliśmy ilorazów
dokładności Δx^2
błąd dyskretyzacji tego samego
rzędu

problem algebraiczny:

$$\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2} + p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + q_i u_i - r_i = 0$$

$$b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = \Delta x^2 r_i \quad a_i = -2 + q_i \Delta x^2$$

$$b_i = 1 - \frac{p_i \Delta x}{2}$$

$$c_i = 1 + \frac{p_i \Delta x}{2}$$

dla $i=1, \dots, N-1$ [dla $i=0, N$ nie stosujemy równania
tylko wb. punkty na brzegu *nie spełniają* rr]

równanie różniczkowe liniowe $\rightarrow$ algebraiczny układ równań liniowych

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{f}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ b_1 & a_1 & c_1 & & & & \\ & b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_{N-2} & a_{N-2} & c_{N-2} & \\ & & & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 r_1 \\ \Delta x^2 r_2 \\ \Delta x^2 r_3 \\ \vdots \\ \Delta x^2 r_{N-1} \end{pmatrix}$$

B

macierz trójkątniowa bo centralne ilorazy
równań: $N+1$ – pierwsze i ostatnie wymuszają WB.
można pozbyć się pierwszego i ostatniego równania

można pozbyć się pierwszego i ostatniego równania

$$b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = \Delta x^2 r_i$$

$$i=1$$

$$a_1 u_1 + c_1 u_2 = \Delta x^2 r_1 - b_1 A$$

$$i=N-1$$

$$b_{N-1} u_{N-2} + a_{N-1} u_{N-1} = \Delta x^2 r_{N-1} - c_{N-1} B$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ & b_2 & a_2 & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{N-2} & a_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & & b_{N-1} & a_{N-1} \end{pmatrix}$$

najlepiej zamiast np. eliminacji Gaussa
rozwiązać problem algorytmem trójkątnym

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 r_1 - b_1 A \\ \Delta x^2 r_2 \\ \Delta x^2 r_3 \\ \vdots \\ \Delta x^2 r_{N-1} - c_{N-1} B \end{pmatrix}$$

zmodyfikowane wg wzoru

dla $n=N-1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_n & a_n & c_n \end{pmatrix}$$

rozwiązać $\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{f}$

dekompozycja

$$\mathbf{A}=\mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{u}=\mathbf{f}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{u}=\mathbf{z}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{z}=\mathbf{f}$$

$$z_1 = f_1$$

$$z_2 = f_2 - \beta_2 z_1$$

$\vdots$

$$z_i = f_i - \beta_i z_{i-1}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \beta_2 & 1 & & & \\ & \beta_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & \\ & \alpha_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$u_n = z_n / \alpha_n$$

$$u_{n-1} = \frac{z_{n-1} - \gamma_{n-1} u_n}{\alpha_{n-1}}$$

itd..

$$\gamma_i = c_i$$

$$\alpha_1 = a_1,$$

$$\beta_i = b_i / \alpha_{i-1}$$

$$\alpha_i = a_i - \beta_i \gamma_{i-1}$$

5n mnożeń /dzieleń
3n dodawań / odejmowań

podczas gdy eliminacja Gaussa
 $n^3/3$ operacji

Błąd globalny dla dwupunktowego problemu brzegowego

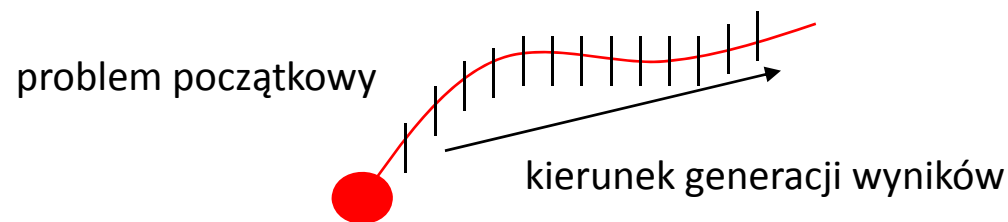
definiowany (jak dla problemów początkowych) jako odchylenie od wartości dokładnej

w problemie początkowym = widzieliśmy akumulację błędów lokalnych,
w której wyniku rzęd błędu globalnego był mniejszy o jeden niż błędu lokalnego

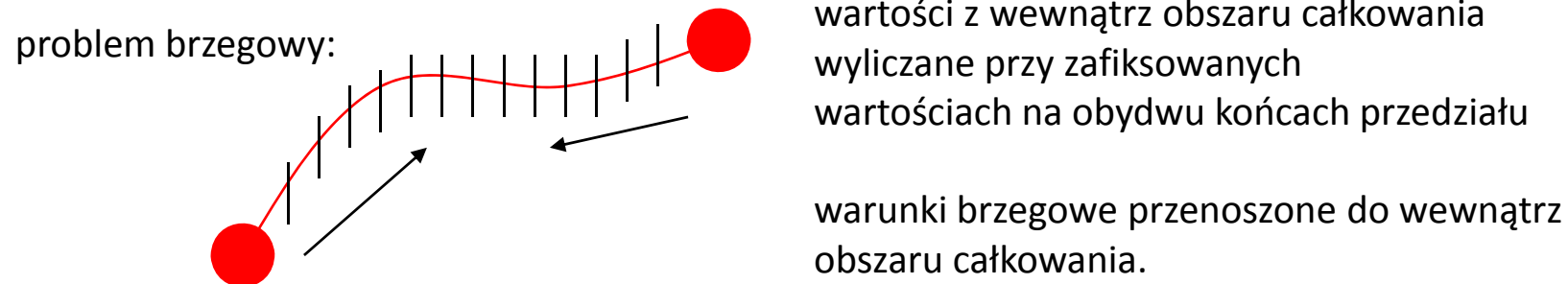
lokalny: $=O(dt^n)$ (w jednym kroku)

globalny w chwili t := zakumulowany w N krokach, gdzie $N=t/dt$

$O(dt^n) t/dt$ daje błąd globalny rzędu $O(dt^{n-1})$



jak jest w problemie brzegowym ? Czy następuje akumulacja błędu od brzegów??



czy punkt ze środka jest policzony z gorszą (o jeden rząd dokładnością) niż punkt z brzegu ???

Problem akumulacji błędu.

Rząd błędu globalnego w zagadnieniu brzegowym

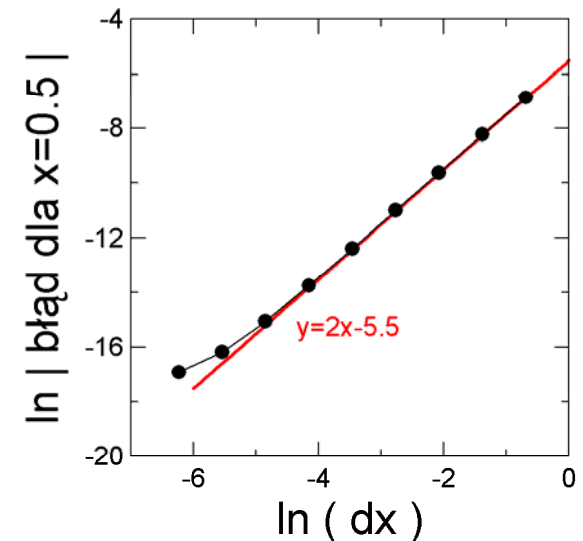
[ten sam czy niższy niż błąd lokalny ?] – eksperyment numeryczny

$$u''(x)=u, u(0)=0, u(1) \rightarrow u(x)=\sinh(x)/\sinh(1), \sinh(x)=(\exp(x)-\exp(-x))/2$$

rachunek na $N=2^j+1$ punktach z $\Delta x=1/N$, $j=1,9$

stosujemy iloraz centralny z błędem lokalnym $O(\Delta x^2)$

widzimy, że błąd globalny
jest również rzędu 2
odchylenie = tam gdzie błędy arytmetyki



wniosek: dla problemu brzegowego (dla zmiennej przestrzennej)

błąd globalny jest tego samego rzędu co błąd lokalny $\rightarrow$ nie ma akumulacji błędu dla przestrzennych stopni swobody (błędy akumulują się tylko z t)

ważne dla r.r. cząstkowych z $(x$ oraz $t)$: błędy w t się akumulują, w x nie:
większa dokładność będzie wymagana dla t niż dla x

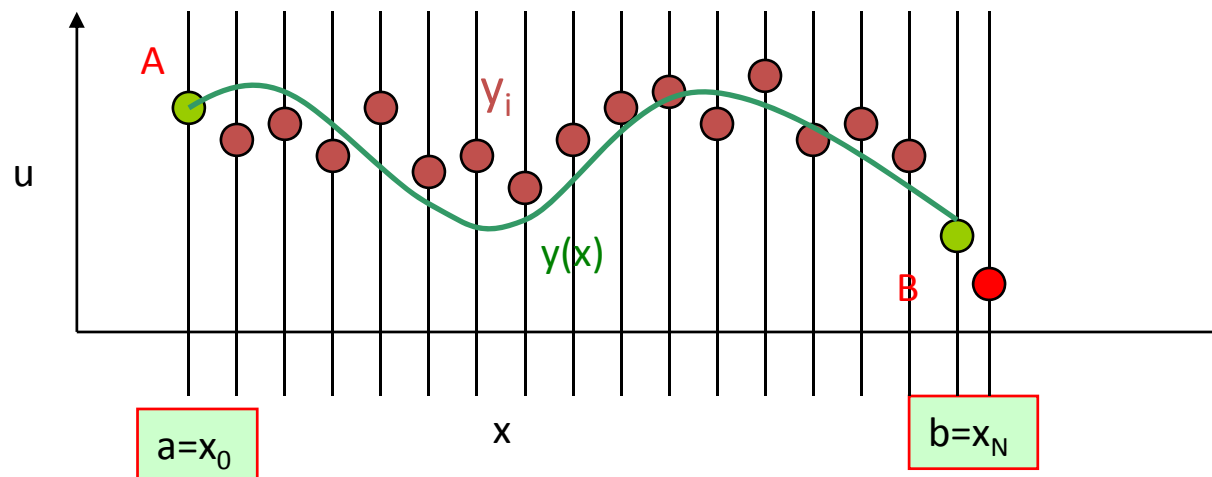
mieszany WB (Robina) dla równania liniowego

$$u''(x) = -p(x)u'(x) - q(x)u(x) + r(x)$$

$$\begin{aligned} u(a) &= A \\ u'(b) + Cu(b) &= B \end{aligned}$$

pochodna z w prawym brzegu: mamy dostępne tylko punkty na lewo od niego:

- 1) możemy zastosować wsteczną pochodną,
ale – wprowadzimy w ten sposób błąd $O(\Delta x)$ do całego rachunku
- 2) możemy zastosować wzór wsteczny z 3-ma punktami,
ale – zakłócimy tróprzekątniową strukturę problemu
- 3) wyjście – *fikcyjny punkt u_{N+1} w $b+\Delta x$*



$$u(a) = A$$

$$u'(b) + Cu(b) = B$$

fikcyjny

$$\text{WB: } \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2\Delta x} + Cu_N = B$$

równanie na punkt ostatni
z punktem fikcyjnym

$$b_N u_{N-1} + a_N u_N + c_N u_{N+1} = \Delta x^2 r_N$$

fikcyjny punkt eliminowany z WB

$$u_{N+1} = 2B\Delta x - C2\Delta x u_N + u_{N-1}$$

do równania:

$$\underline{(b_N + c_N)u_{N-1} + (a_N - 2Cc_N\Delta x)u_N} = \Delta x^2 r_N - 2Bc_N\Delta x$$

2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & 2 & a_N - 2\Delta x C c_n \end{pmatrix}$$

p. trójp.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 r_1 - b_1 A \\ \Delta x^2 r_2 \\ \Delta x^2 r_3 \\ \vdots \\ \Delta x^2 r_N - 2Bc_N\Delta x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & 2 & a_N - 2\Delta x C c_n \end{pmatrix} \quad \text{p. trójp.} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 r_1 - b_1 A \\ \Delta x^2 r_2 \\ \Delta x^2 r_3 \\ \vdots \\ \Delta x^2 r_N - 2B c_N \Delta x \end{pmatrix}$$

uwaga: dla Dirichleta – modyfikujemy prawą stronę (tzw. naturalny wb)
 : dla Neumanna i Robina – modyfikujemy macierz A (tzw. istotny wb)

problem algebraiczny z dyskretyzacji równania nieliniowego

$$u''(x) = f(x, u, u')$$

układ równań nieliniowych:

$$F_i(\mathbf{u}) = u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} - \Delta x^2 f\left(x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}\right) = 0$$

metoda Newtona dla układu równań: $\mathbf{F}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(\mu)}) \left(\mathbf{u}^{(\mu+1)} - \mathbf{u}^{(\mu)} \right) = -\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(\mu)})$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial u_1} & \frac{\partial F_N}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'}\right) \delta_{i,j+1} + \left(-2 - \Delta x^2 \frac{\partial f}{\partial u}\right) \delta_{i,j} + \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'}\right) \delta_{i,j-1}$$

funkcja i pochodne
liczone w

$$\left(x_i, u_i^\mu, \frac{u_{i+1}^\mu - u_{i-1}^\mu}{2\Delta x}\right)$$

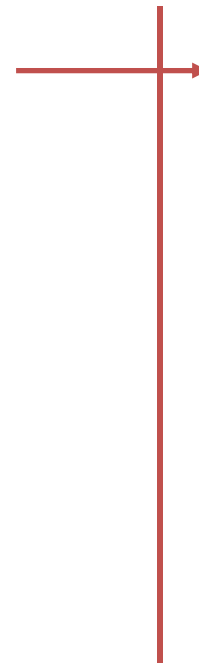
$$\mathbf{F}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(\mu)}) \left(\mathbf{u}^{(\mu+1)} - \mathbf{u}^{(\mu)} \right) = -\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(\mu)})$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'} \right) \delta_{i,j+1} + \left(-2 - \Delta x^2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta_{i,j} + \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'} \right) \delta_{i,j-1}$$

$$c_i^\mu = \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'}(x_i, u_i^\mu, \frac{u_{i+1}^\mu - u_{i-1}^\mu}{2\Delta x}) \right)$$

$$a_i^\mu = - \left(2 + \Delta x^2 \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i^\mu, \frac{u_{i+1}^\mu - u_{i-1}^\mu}{2\Delta x}) \right)$$

$$b_i^\mu = \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'}(x_i, u_i^\mu, \frac{u_{i+1}^\mu - u_{i-1}^\mu}{2\Delta x}) \right)$$



w każdej
iteracji Newtona
układ równań z
macierzą
trójkątniową
do rozwiązania

Przykład: - problem pręta w imadle: zmieniamy oznaczenia $s \rightarrow x$, $\theta \rightarrow u$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, u, u') = -P \sin(u)$$

$$u(0) = -u(1) = \beta, u(1/2) = 0$$

u – na siatce od 0 do $\frac{1}{2}$

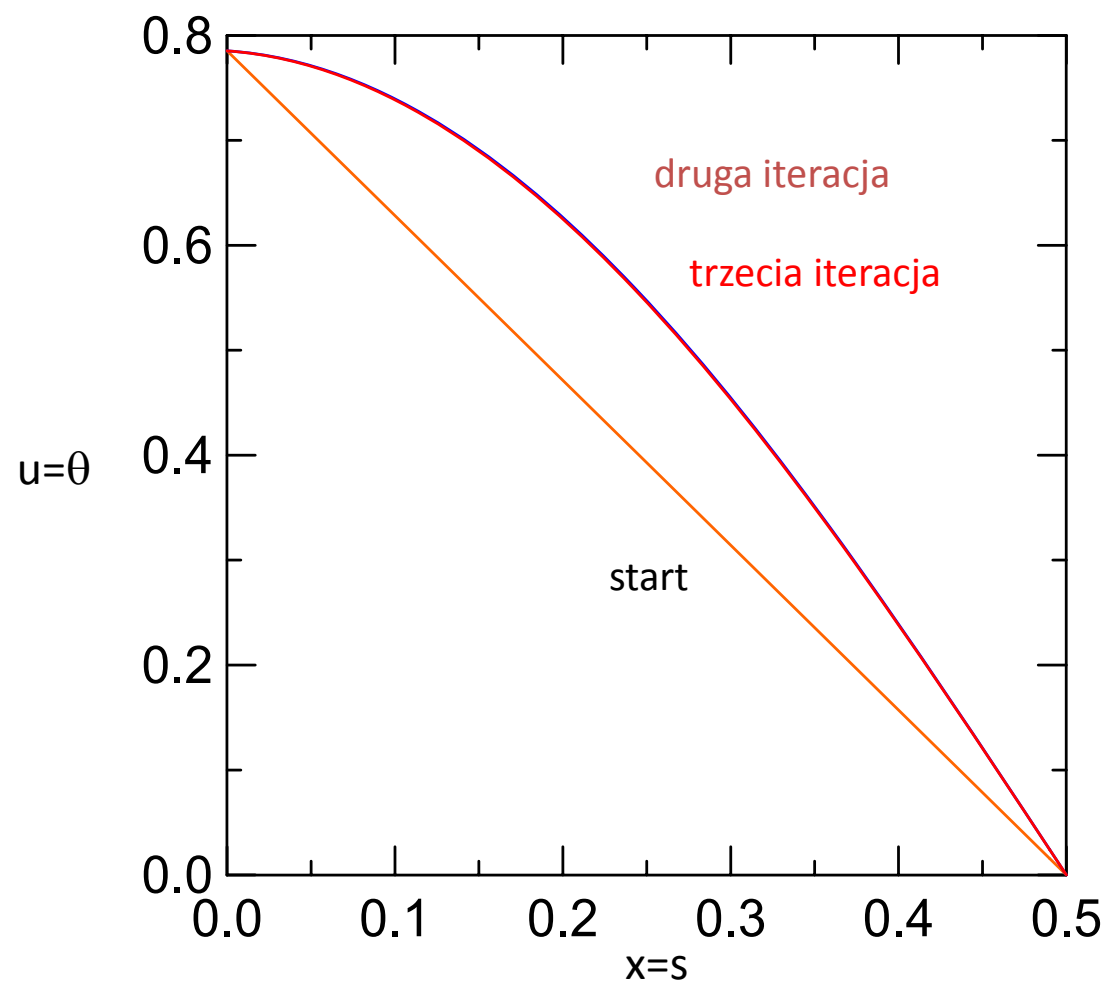
wzory ogólne: $F_i(\mathbf{u}) = u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} - \Delta x^2 f(x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}) = 0$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(\mu)}) \left(\mathbf{u}^{(\mu+1)} - \mathbf{u}^{(\mu)} \right) = -\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(\mu)})$$

$c_i^\mu = \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'}(x_i, u_i^\mu, \frac{u_{i+1}^\mu - u_{i-1}^\mu}{2\Delta x}) \right)$		1
$a_i^\mu = - \left(2 + \Delta x^2 \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i^\mu, \frac{u_{i+1}^\mu - u_{i-1}^\mu}{2\Delta x}) \right)$		$a_i^\mu = -2 + P \Delta x^2 \cos(u_i)$
$b_i^\mu = \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial u'}(x_i, u_i^\mu, \frac{u_{i+1}^\mu - u_{i-1}^\mu}{2\Delta x}) \right)$		1

Przykład: - problem pręta w imadle

Wyniki



Przykład: - problem pręta w imadle

Wyniki

