Monte Carlo: proste całkowanie z szacowaniem wariancji

23 marca 2023

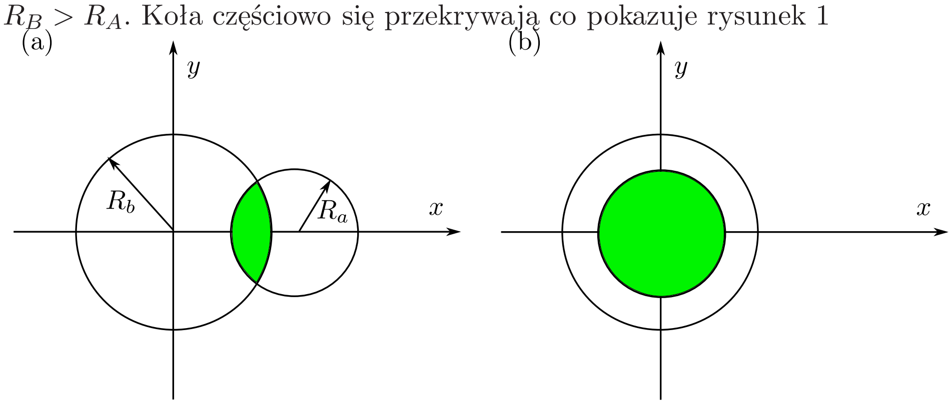
1 Wstęp

Definiujemy dwa koła na płaszczyźnie

$$K_A = \{(x, y) : (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \leqslant R_A^2\} \tag{1}$$

$$K_B = \{(x, y) : (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \leqslant R_B^2\} \tag{2}$$

o promieniach $R_B > R_A$. Koła częściowo się przekrywają co pokazuje rysunek 1



Rysunek 1: Wspólna powierzchnia dla częściowego i całkowitego przekrywania się kół.

Rozważamy problem oszacowania pola powierzchnii części wspólnej metodą całkowania Monte Carlo.

1.1 generator rozkładu jednorodnego w kole 2D

Do wygenerowania punktów w kole K_α, $\alpha = A, B$ wykorzystamy rozkład sferycznie konturowany (rozkład normalny $N(0, 1)$), który po normalizacji stanie się rozkładem jednorodnym na sferze, a następnie skalujemy go zmienną o fgp $h(r) = 2r$ (patrz wykład z generatorów). Pseudokod losowania pojedynczego punktu w kole jest następujący

$u_1, u_2 \sim U(0, 1)$ – rozkład jednorodny (0,1)
$x = \sqrt{-2ln(u_1)}sin(2\pi u_2)$ – rozkład normalny N(0,1)
$y = \sqrt{-2ln(u_1)}cos(2\pi u_2)$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$x \leftarrow \frac{x}{r}$ – normalizacja (rozkład na sferze)
$y \leftarrow \frac{y}{r}$

$u_3 \sim U(0,1)$
$q = \sqrt{u_3}$ – losujemy odległość od środka koła
$x \leftarrow q \cdot x \cdot R_\alpha + x_\alpha$ –skalowanie + przesunięcie środka koła
$y \leftarrow q \cdot y \cdot R_\alpha + y_\alpha$

1.2 fgp rozkładu w kole

Dla fgp jednorodnego rozkładu w kole $f_\alpha(x,y) = const$ żadamy spełnienia warunku normalizacji

$$f_\alpha(x,y) = const = C \tag{3}$$
$$\int_{(x,y)\in K_\alpha} f_\alpha(x,y)dxdy = 1 \tag{4}$$
$$C\int_{(x,y)\in K_\alpha} 1dxdy = C\pi R_\alpha^2 = 1 \tag{5}$$
$$C = \frac{1}{\pi R_\alpha^2} \tag{6}$$

1.3 powierzchnia koła i części wspólnej, wariancja wyniku

Powierzchnię koła znajdziemy licząc całkę po powierzchnii koła K_α

$$S_\alpha = \int\limits_{(x,y)\in K_\alpha} 1dxdy = \int\limits_{(x,y)\in K_\alpha} \frac{1}{f_\alpha(x,y)} f_\alpha(x,y)dxdy = \pi R_\alpha^2 \int\limits_{(x,y)\in K_\alpha} f_\alpha(x,y)dxdy \tag{7}$$

Analogicznie możemy zdefiniować całkę powierzchniową dla części wspólnej

$$S_{\alpha,\beta} = \pi R_\alpha^2 \int\limits_{(x,y)\in K_\alpha} \theta_{\alpha,\beta}(x,y)dxdy \tag{8}$$
$$\theta_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} 1 & \iff (x,y)\in K_\alpha \wedge (x,y)\in K_\beta \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \tag{9}$$

θ pełni rolę funkcji wskaźnikowej o wartości binarnej (metoda eliminacji). Pole powierzchnii części wspólnej w MC liczymy jako średnią z N wartości funkcji podcałkowej ($\mu^{(1)}$ - pierwszy moment rozkładu)

$$\mu^{(1)} = \bar{S}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i,y_i) \tag{10}$$

gdzie punkty (x_i, y_i) losujemy z rozkładu jednorodnego w kole K_α. Analogicznie liczymy drugi moment, uwzględniając własność $\theta_{\alpha,\beta}^2 = \theta_{\alpha,\beta}$

$$\mu^{(2)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i,y_i)\right)^2 = \pi R_\alpha^2 \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i,y_i)\right) = \pi R_\alpha^2 \mu^{(1)} \tag{11}$$

Mając pierwszy i drugi moment możemy policzyć wariację wartości średniej

$$\sigma^2_{\bar{S}_{\alpha,\beta}} = \frac{\mu^{(2)} - \left(\mu^{(1)}\right)^2}{N} \tag{12}$$

i odchylenie standardowe wartości średniej

$$\sigma_{\bar{S}_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\frac{\mu^{(2)} - \left(\mu^{(1)}\right)^2}{N}} \tag{13}$$

2 Zadania do wkonania

1. Zaprogramować metodę MC obliczania wspólnej powierzchnii przekrywających się kół. W obliczeniach przyjąć parametry: $R_A = 1$, $R_B = \sqrt{2}R_A$, $\vec{r}_A = [x_A, 0]$, $\vec{r}_B = [0, 0]$. Wartość x_A będziemy zmieniać.

2. Prosty test generatora. Wygenerować $N = 10^4$ punktów w kole K_A przyjmując $x_A = R_A + R_B$ i w kole K_B. W obu przypadkach narysować wygenerowane punkty.

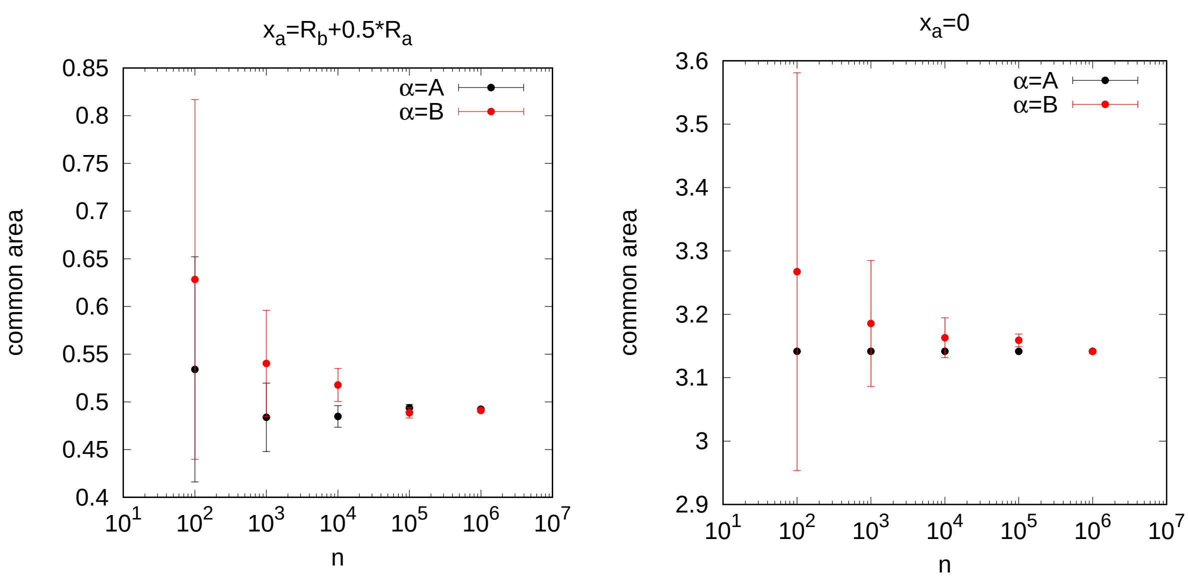
3. Wygenerować $N = 10^6$ punktów wewnątrz koła K_α, obliczyć wartości $\bar{S}_{\alpha,\beta}$ i $\sigma_{\bar{S}_{\alpha,\beta}}$ dla $n = 10^k$, $k = 2, 3, 4, 5, 6$ dla

   a) $\alpha = A$, $x_A = R_B + 0.5 \cdot R_A$
   b) $\alpha = A$, $x_A = 0$
   c) $\alpha = B$, $x_A = R_B + 0.5 \cdot R_A$
   d) $\alpha = B$, $x_A = 0$

   Sporządzić wykres $\bar{S}_{\alpha,\beta}$ w funkcji liczby losowań n zaznaczając na nim błędy ($\sigma_{\bar{S}_{\alpha,\beta}}$), przyjąć skalę logartmiczną dla osi n. Wspólny wykres dla (a) i (c) oraz wspólny dla (b) i (d).

4. W raporcie przedyskutować otrzymane wyniki, w szczególności różnice błędów.

3 przykładowe wyniki



Rysunek 2: Wspólna powierzchnia dla częściowego i całkowitego przekrywania się kół.