Aproksymacja wielomianowa

Tomasz Chwiej

7 maja 2018

1 Sformułowanie problemu

Naszym celem będzie aproksymacja funkcji typu:

$$g(x) = exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = exp\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) \tag{1}$$

gdzie: $a_0 = -x_0^2/2/\sigma^2$, $a_1 = x_0/\sigma^2$, $a_2 = -1/2/\sigma^2$ Jeśli zlogarytmyjemy funkcję g(x) to otrzymamy zależność wielomianową:

$$f(x) = ln(g(x)) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{2}$$

którą możemy aproksymować w bazie jednowmianów. Wybieramy 4 elementową bazę $\{\varphi_i\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i szukamy kombinacji liniowej:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m=3} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \tag{3}$$

aby utworzyć funkcję G(x) będącą przybliżeniem funkcji g(x):

$$g(x) \approx G(x) = exp\left(F(x)\right) = exp\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3\right) \tag{4}$$

2 Rozwiązanie

Jak znaleźć współczynniki b_0, b_1, b_2, b_3? Korzystamy z wzorów podanych na wykładzie pamiętając, że węzły i elementy bazy numerujemy zaczynając od 0 (na potrzeby biblioteki GSL, której użyjemy). Elementy bazy jednomianów indeksujemy: $k = 0, 1, \ldots, m-1$, a węzły aproksymacji $x_j, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1$. Punktem wyjścia jest równanie:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left[f_j - \sum_{i=0}^{m-1} b_i x_j^i\right] x_j^k = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{5}$$

które rozdzielamy

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j x_j^k = \sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k}\right) \tag{6}$$

Powyższe równanie można zapisać w postaci:

$$r_k = \sum_{i=0}^{m-1} b_i g_{ik} \tag{7}$$

gdzie:

$$r_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_j^k \tag{8}$$

oraz

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k} \tag{9}$$

Jeśli uwzględnimy wszystkie elementy bazy k to dostaniemy układ równań:

$$\mathbf{b}^T\mathbf{G} = \mathbf{r}^T \tag{10}$$

co po transpozycji obu stron równania daje:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{b} = \mathbf{r} \tag{11}$$

Ponieważ macierz $\mathbf{G}$ (zdefiniowana w rów. 9) jest symetryczna, więc $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$ i ostatecznie, równanie które należy rozwiązać ma postać:

$$\mathbf{G}\mathbf{b} = \mathbf{r} \tag{12}$$

3 Zadania do wykonania

Dla funkcji (1) przyjmujemy parametry: $x_0 = 2$, $\sigma = 4$. Aproksymację przeprowadzamy w zakresie $x \in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$

1. Dla określonego N wyznaczyć odległość pomiędzy sąsiednimi węzłami siatki (równoodległe). Węzły indeksujemy od 0 do N-1. Stablicować wartości funkcji g(x) oraz f(x) w węzłach siatki.

2. Napisać program do aproksymacji (do rozwiązania układu równań użyć odpowiedniej procedury z biblioteki GSL) a następnie wykonać aproksymację funkcji (1) w bazie jednomianów $m = 4$ elementowej dla $N = 11$ węzłów. Porównać otrzymane współczynniki b_i z odpowiadającymi im wartościami a_l (zapisując je do pliku). Wykonać wykres funkcji g(x) oraz G(x) na jedym rysunku.

3. Przeprowadzić aproksymację funkcji

$$g_2(x) = g(x)(1 + \delta(x)) \tag{13}$$

Funkcja g(x) jest zdefinowana jak poprzednio wzorem (1) z identycznymi parametrami tj. $x_0 = 2$, $\sigma = 4$. Funkcja $\delta(x)$ jest zdefiniowana następująco

$$\delta(x) = \alpha \cdot (U - 0.5) \tag{14}$$

gdzie: $\alpha = 0.5$, a zmienna $U \in [0, 1]$ jest liczbą pseudolosową

$$U = \frac{rand()}{RAND\_MAX + 1.0} \tag{15}$$

Aproksymację wykonać dla $N = 11, 101$ węzłów. Porównać wartości b_i z a_i (zapisać do pliku). Sporządzić wykresy G(x) (wykres ciągły) oraz stablicowanej funkcji g(x) (tylko w węzłach) na jednym rysunku dla $N = 11$ oraz dla $N = 101$.