

Szacowanie całek przy użyciu kwadratur Gaussa

Tomasz Chwiej

26 maja 2020

1 Wstęp

Numeryczne liczenie wartości całki polega na jej oszacowaniu przy użyciu kwadratury

$$C = \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i \cdot f(x_i) \quad (1)$$

gdzie: A_i to współczynniki kwadratury, a x_i to położenia węzłów kwadratury. W powyższej całce oprócz funkcji podcałkowej $f(x)$ pod całką znajduje się funkcja wagowa $p(x)$, jej postać determinuje sposób wyznaczania węzłów i wartości współczynników kwadratury. Nas interesować będą trzy typy kwadratur Gaussa:

- $p(x) = 1$, $x \in [a, b]$ - kwadratura Gaussa-Legendre'a
- $p(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$ - kwadratura Gaussa-Laguerre'a
- $p(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$

Uwaga: zgodnie z wzorem definicyjnym (1) funkcja wagowa jest zawarta we współczynnikach A_i , więc sumowanie wykonujemy tylko po wartościach funkcji $f(x)$. Natomiast rodzaj wagi będzie determinować typ kwadratury tj. wybór metody wyznaczającej węzły i wagi.

2 Uwagi praktyczne

W projekcie należy wykorzystać procedury z biblioteki Numerical Recipes (NR). Na serwerze Taurus ścieżka do katalogu z procedurami NR jest następująca

```
/home/NR/numerical_recipes.c
```

z katalogu tego należy pobrać (do katalogu roboczego) pliki nagłówkowe biblioteki: [nrutil.c](#), [nrutil.h](#), [nr.h](#) oraz pliki wyznaczające węzły i współczynniki kwadratur: [gauleg.c](#) - Legendre'a, [gaulag.c](#) - Laguerre'a, [gauher.c](#) - Hermite'a, oraz plik pomocniczy [gammln.c](#). Należy pamiętać o dołączeniu plików do programu głównego

```
#include"nrutil.c"
#include"nrutil.h"
#include"nr.h"

#include"gauher.c"
#include"gauleg.c"
#include"gaulag.c"
#include"gammln.c"
```

Interesujące nas procedury przyjmują następujące argumenty:

- metoda Gaussa-Legendre'a

```
void gauleg(float x1, float x2, float x[], float w[], int n)
```

gdzie: x_1 - lewy kraniec przedziału całkowania, x_2 - prawy kraniec przedziału całkowania, n - liczba węzłów, $x[]$ - tablica z położeniami węzłów kwadratury, $w[]$ - tablica z wartościami współczynników kwadratury

- metoda Gaussa-Laguerre'a

```
void gaulag(float x[], float w[], int n, float alf)
```

gdzie: n - liczba węzłów, $x[]$ - tablica z położeniami węzłów kwadratury, $w[]$ - tablica z wartościami współczynników kwadratury, $alf = 0$ - parametr określający typ wielomianów Laguerre'a ($alf = 0$ - zwykłe)

- metoda Gaussa-Hermite'a

```
void gauher(float x[], float w[], int n)
```

gdzie: n - liczba węzłów, $x[]$ - tablica z położeniami węzłów kwadratury, $w[]$ - tablica z wartościami współczynników kwadratury

Uwaga: tablice $x[]$ oraz $w[]$ mają $n+1$ elementów indeksowanych od 0 do n , natomiast procedury zwracają n węzłów i współczynników kwadratur w elementach tablic indeksowanych od 1 do n (zerowego elementu nie wykorzystujemy).

3 Zadania do wykonania

1. Wyznaczyć wartość całki niewłaściwej ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$) kwadraturą Gaussa-Legendre'a

$$C_1 = \int_0^a \ln(x) dx = a \ln(a) - a, \quad a > 0 \quad (2)$$

dla $a = 10$ oraz liczby węzłów $n = 5, 6, 7, \dots, 70$. Wynik przedstawić w postaci wykresu modułu różnicy wartości dokładnej i numerycznej $|C_{dok} - C_{num}|$ (skala pionowa logarytmiczna).

2. Wyznaczyć wartość całki

$$C_2 = \int_0^\infty (x-10)^2 \sin(4x) e^{-x} dx = 22.95461022 \quad (3)$$

przy użyciu:

- a) kwadratury Gaussa-Laguerre'a: $x \in [0, \infty)$, $f(x) = (x-10)^2 \sin(4x)$, $p(x) = e^{-x}$
- b) kwadratury Gaussa-Legendre'a: $x \in [0, 10]$ - zmieniamy górną granicę całkowania, $f(x) = (x-10)^2 \sin(4x) e^{-x}$, $p(x) = 1$

dla liczby węzłów $n = 5, 6, 7, \dots, 70$. Wynik przedstawić w postaci wykresu modułu różnicy wartości dokładnej i numerycznej $|C_{dok} - C_{num}|$ (skala pionowa logarytmiczna).

3. Wyznaczyć wartość całki

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^7 \cdot 2^{(-x^2+x+4)} \cdot e^{-x^2} dx = 14.83995751 \quad (4)$$

przy użyciu:

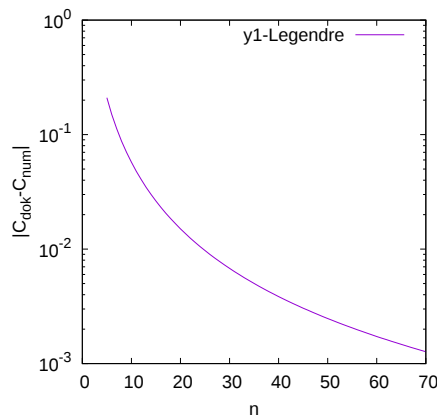
- a) kwadratury Gaussa-Hermite'a: $x \in [0, \infty)$, $f(x) = x^7 \cdot 2^{(-x^2+x+4)}$, $p(x) = e^{-x^2}$
- b) kwadratury Gaussa-Legendre'a: $x \in [-10, 15]$, $f(x) = x^7 \cdot 2^{(-x^2+x+4)}$, $p(x) = 1$

dla liczby węzłów $n = 5, 6, 7, \dots, 70$. Wynik przedstawić w postaci wykresu modułu różnicy wartości dokładnej i numerycznej $|C_{dok} - C_{num}|$ (skala pionowa logarytmiczna).

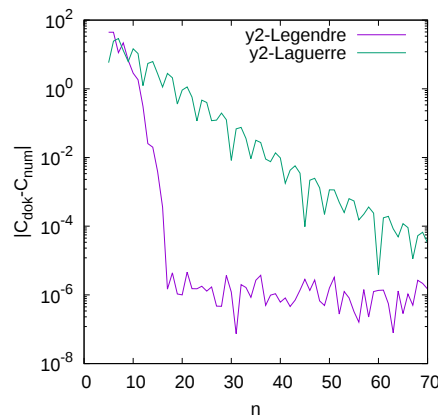
W sprawozdaniu proszę umieścić wykresy iloczynów funkcji podcałkowych i funkcji wagowych $f(x) \cdot p(x)$ i na podstawie ich przebiegów wyjaśnić dlaczego w niektórych przypadkach możliwe jest zastąpienie kwadratur Laguerre'a i Hermite'a kwadraturą Legendre'a.

4 Przykładowe wyniki

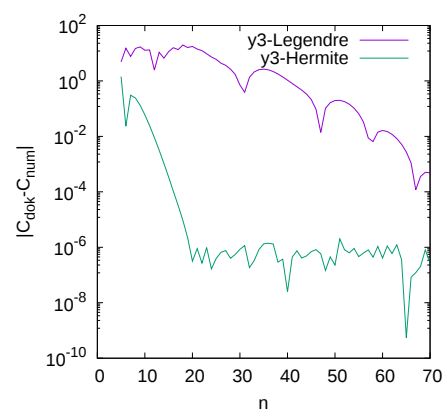
(a)



(b)



(c)



Rysunek 1: Przykładowe wyniki dla funkcji podcałkowej : (a) $y_1 = f_1(x)$, (b) $y_2 = f_2(x)$ i (c) $y_3 = f_3(x)$.