Szacowanie całek niewłaściwych przy użyciu kwadratur Gaussa

Tomasz Chwiej

4 czerwca 2018

1 Procedury NR

1. Do całkowania w przedziale [a,b], $-\infty < a, b < \infty$, z wagą równą 1 służy kwadratura Gaussa-Legendre'a. Do wyznaczenia położenia węzłów i współczynników kwadratury można użyć procedury **gauleg**:

   ```
   gauleg(float x1,float x2, float x[],float w[],int n)
   ```

   gdzie: x1-dolna granica całkowania, x2 - górna granica całkowania, x[] - wektor zawierający położenia węzłów kwadratury, w[] - współczynniki kwadratury, n - liczba wezłów kwadratury

2. Do całkowania w przedziale $[0, \infty)$ z wagą $exp(-x)$ służy kwadratura Gaussa-Laguerre'a. Do wyznaczenia położenia węzłów i współczynników kwadratury można użyć procedury **gaulag**:

   ```
   gaulag(float x[],float w[],int n,float alfa)
   ```

   gdzie: x[] - wektor zawierający położenia węzłów kwadratury, w[] - współczynniki kwadratury, n - liczba wezłów kwadratury, alfa - parametr stowarzyszonego wielomianu Laguerre'a (przyjąć alfa=0)

3. Do całkowania w przedziale $(-\infty, \infty)$ z wagą $exp(-x^2)$ służy kwadratura Gaussa-Hermite'a. Do wyznaczenia położenia węzłów i współczynników kwadratury można użyć procedury **gauher**:

   ```
   gauher(float x[],float w[],int n)
   ```

   gdzie: x[] - wektor zawierający położenia węzłów kwadratury, w[] - współczynniki kwadratury, n - liczba wezłów kwadratury

2 Zadania do wykonania

1. Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Legendre'a wartość całki

   $$c_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \tag{1}$$

   Wartość dokładna całki: $c_{1,a} = \pi/3$. Wykonać wykres $|c_1 - c_{1,a}| = f(n)$, dla liczby węzłów $n = 2, 3, \ldots, 100$.

2. Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a wartość całki

   $$c_2 = \int_0^\infty ln(x)exp(-x^2)dx \tag{2}$$

a) Stosując kwadraturę Gaussa-Hermite'a dla: $n = 2, 4, 6, 8, \ldots, 100$.
   Uwaga: ponieważ w kwadraturze zakres całkowania rozciąga się na $x \in (-\infty, \infty)$, wobec czego w funkcji podcałkowej (2) musimy użyć $ln(|x|)$ a wynik całkowania podzielić przez 2.

b) Stosując kwadraturę Gaussa-Legendre's dla: $n = 2, 3, 4, 5, \ldots, 100$ oraz $x \in [0, 5]$.

Wartość dokładna całki $c_{2,a} = -0.8700577$. Dla podpunktów (a) i (b) wykonać wykres $|c_2 - c_{2,a}| = f(n)$. W sprawozdaniu proszę wyjaśnić, która kwadratura daje lepsze wyniki i dlaczego? W tym celu proszę sporządzić wykres funkcji $g_2(x) = ln(x)e^{-x^2}$ dla $x \in [0.01, 2.5]$, który wiele wyjaśnia.

3. Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguere'a wartość całki

$$c_3 = \int_0^\infty sin(2x)e^{-3x}dx \tag{3}$$

Uwaga: w kwadraturze Gaussa-Laguerre'a funkcja wagowa ma postać: e^{-x}. Dlatego w pierwotnej funkcji podcałkowej (3) należy najpierw wydzielić funkcję wagową a pozostałą część potraktować jako całkowaną funkcję. Inny sposób polega na transformacji zmiennej po której całkujemy: $3x = y$, po to aby dopasować wykładnik do naszych potrzeb. Wybór sposobu transformacji funkcji podcałkowej: dowolny.

Wartość dokładna całki: $c_{3,a} = 2/13$. Proszę wykonać wykres $|c_3 - c_{3,a}| = f(n)$, dla liczby węzłów $n = 2, 3, \ldots, 10$.

Przykładowe wyniki :