Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa

Tomasz Chwiej

3 stycznia 2013

1 Procedury NR

1. Do całkowania w przedziale [a,b], $-\infty < a, b < \infty$, z wagą równą 1 służy kwadratura Gaussa-Legendre'a. Do wyznaczenia położenia węzłów i współczynników kwadratury można użyć procedury **gauleg**:

   ```
   gauleg(float x1,float x2, float x[],float w[],int n)
   ```

   gdzie: x1-dolna granica całkowania, x2 - górna granica całkowania, x[] - wektor zawierający położenia węzłów kwadratury, w[] - współczynniki kwadratury, n - liczba wezłów kwadratury

2. Do całkowania w przedziale $[0, \infty)$ z wagą $exp(-x)$ służy kwadratura Gaussa-Laguerre'a. Do wyznaczenia położenia węzłów i współczynników kwadratury można użyć procedury **gaulag**:

   ```
   gaulag(float x[],float w[],int n,float alfa)
   ```

   gdzie: x[] - wektor zawierający położenia węzłów kwadratury, w[] - współczynniki kwadratury, n - liczba wezłów kwadratury, alfa - parametr stowarzyszonego wielomianu Laguerre'a (przyjąć alfa=0)

3. Do całkowania w przedziale $(-\infty, \infty)$ z wagą $exp(-x^2)$ służy kwadratura Gaussa-Hermite'a. Do wyznaczenia położenia węzłów i współczynników kwadratury można użyć procedury **gauher**:

   ```
   gauher(float x[],float w[],int n)
   ```

   gdzie: x[] - wektor zawierający położenia węzłów kwadratury, w[] - współczynniki kwadratury, n - liczba wezłów kwadratury

2 Zadania do wykonania

1. Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Legendre'a wartość całki

   $$c_1 = \int_0^2 \frac{x}{4x^2+1} dx \tag{1}$$

   Wartość dokładną można obliczyć korzystając z rozwiązania analitycznego

   $$c_{1,a} = \int \frac{x}{a^2x^2 \pm c^2} dx = \frac{1}{2a^2} ln|a^2x^2 \pm c^2| \tag{2}$$

   Wykonać wykres $|c_1 - c_{1,a}| = f(n)$, dla liczby węzłów $n = 2, 3, \ldots, 20$.

   W sprawozdaniu dodatkowo należy: a) sprawdzić ile wynosi suma współczynników kwadratury dla każdego n, b) umieścić wykres całkowanej funkcji.

2. Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a wartość całki

$$c_2 = \int_0^\infty x^k exp(-x)dx \tag{3}$$

Wartość dokładną można obliczyć korzystając z rozwiązania analitycznego

$$c_{2,a} = \int_0^\infty x^k exp(-x)dx = k! \tag{4}$$

Wykonać wykresy: a) $|c_2 - c_{2,a}| = f(n)$, dla $k = 5$ i dla liczby węzłów $n = 2, 3, \ldots, 20$ oraz b) $|c_2 - c_{2,a}| = f(n)$, dla $k = 10$ i dla liczby węzłów $n = 2, 3, \ldots, 20$. W sprawozdaniu należy dodatkowo: a) przedyskutować dokładność oszacowania wartości całki ze względu na stopień wielomianu podcałkowego i liczbę użytych węzłów, b) sprawdzić ile wynosi suma współczynników kwadratury dla każdego n, c) sporządzić wykres całkowanej funkcji.

3. Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a wartość **podwójnej całki**

$$c_3 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty sin^2(x) sin^4(y) exp(-x^2 - y^2)dxdy \quad (c_{dok} = 0.1919832644) \tag{5}$$

Uwaga: węzły i wagi kwadratury wyznaczamy tylko raz, które wykorzystujemy do obliczenia wartośći całki w podówjnej pętli (bo całkujemy w 2 wymiarach). Proszę wykonać wykres $|c_3 - c_{dok}| = f(n)$, dla liczby węzłów $n = 2, 3, \ldots, 15$.