Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów: trapezów i $\frac{3}{8}$

Tomasz Chwiej

30 maja 2018

1 Wstęp

Dana jest funkcja:

$$f(x) = ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)sin(18x) \tag{1}$$

Należy obliczyć wartość całki:

$$I = \int_0^1 f(x) \quad (= -0.186486896) \tag{2}$$

stosując ekstrapolację Richardsona w połączeniu z wzorami:

- trapezów

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) \tag{3}$$

- 3/8

$$S = \sum_{i=0}^{(N/3)-1} \frac{3h}{8} (f_{3i} + 3f_{3i+1} + 3f_{3i+2} + f_{3i+3}) \tag{4}$$

  gdzie: h jest odległością między sąsiednimi węzłami, (N+1) jest liczbą węzłów kwadratury (węzły numerujemy od 0 do N)

2 Zadania do wykonania

Dla każdej z powyższych metod należy napisać funkcję, która będzie wyznaczać wartość całki na podstawie przekazywanych jej: stablicowanych wartości funkcji (tablica jednowymiarowa), wartości h i wartości N. Zaprogramować metodę ekstrapolacji Richardsona. Zadanie należy rozdzielić na dwie części:

1. W pętli obliczamy pierwszą kolumnę tablicy wartości całek $D_{n,0} = S$ w każdej iteracji posługując się krokiem

   - dla wzoru trapezów

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}, n = 0, 1, 2, \ldots, 8 \quad N = 2^n, \quad i = 0, 1, \ldots, N \tag{5}$$

   - dla wzoru $\frac{3}{8}$

$$h_n = \frac{b-a}{3 \cdot 2^n}, n = 0, 1, 2, \ldots, 8 \quad N = 3 \cdot 2^n, \quad i = 0, 1, \ldots, N \tag{6}$$

2. Na podstawie zajomości pierwszej kolumny i wzoru ekstrapolacyjnego

$$D_{n,k} = \frac{4^k D_{n,k-1} - D_{n-1,k-1}}{4^k - 1} \tag{7}$$

należy wyznaczyć pozostałe elementy tablicy

$$\begin{array}{lllll} D_{0,0} & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{n,0} & D_{n,1} & D_{n,2} & \ldots & D_{n,n} \end{array} \tag{8}$$

Obliczenia całki z ekstrapolacją przeprowadzić dla obu wzorów całkowania. Wyniki czyli tablice $D_{n,k}$ zapisać do pliku.
W sprawozdaniu proszę dokonać analizy elementów z pierwszej kolumny i elementów diagonalnych.