Wyznaczanie zespolonych zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia i metodą Newtona.

Tomasz Chwiej

10 kwietnia 2018

1 Wstęp

Dany jest wielomian zespolony, którego zera chcemy znaleźć:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 = 0 \tag{1}$$

Jeśli podzielimy wielomian przez wyraz $(z - z_j)$ to otrzymamy:

$$f(z) = (z - z_j)(b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_0) + R_j \tag{2}$$

Współczynniki nowego wielomianu $\{b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0\}$ oraz reszty dzielenia R_j wyznaczamy rekurencyjnie

$$b_n = 0 \tag{3}$$
$$b_k = a_{k+1} + z_j b_{k+1}, \ k = n-1, n-2, \ldots, 0 \tag{4}$$
$$R_j = a_0 + z_j b_0 \tag{5}$$

Powtarzając jeszcze raz operację dzielenia otrzymamy

$$f(z) = (z - z_j)^2 (c_{n-2} z^{n-2} + c_{n-3} z^{n-3} + \ldots + c_0) + (z - z_j) R_j^{'} + R_j \tag{6}$$

gdzie: współczynniki $\{c_{n-2}, c_{n-3}, \ldots, c_0\}$ oraz $R_j^{'}$ obliczamy podobnie

$$c_{n-1} = 0 \tag{7}$$
$$c_k = b_{k+1} + z_j c_{k+1}, \ k = n-2, n-2, \ldots, 0 \tag{8}$$
$$R_j^{'} = b_0 + z_j c_0 \tag{9}$$

Mając R_j oraz $R_j^{'}$ obliczamy kolejne przybliżenie zera wielomianu

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j}{R_j^{'}} \tag{10}$$

2 Zadania do wykonania

1. Obliczenia prowadzimy używając liczb zespolonych. W tym celu należy do kodu dołączyć plik nagłówkowy

   ```
   #include<complex.h>
   ```

   Deklaracja użycia zmiennej zespolonej z inicjalizacją w C

   ```
   double complex z = 89.0 + 68.I
   ```

Tworzenie i wypełnanie elementów tablic - analogicznie. Współczynnki wielomianów zapisujemy w wektorach: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ indeksowanych od 0 - tak będzie wygodniej.

2. Będziemy poszukiwać zer wielomianu 4 stopnia o współczynnikach:

$$a_0 = 16 + 8I \tag{11}$$
$$a_1 = -20 + 14I \tag{12}$$
$$a_2 = 4 - 8I \tag{13}$$
$$a_3 = -4 + I \tag{14}$$
$$a_4 = 1 + 0I \tag{15}$$

   Dokładne położenia zer (do testów programu): $z_1 = I$, $z_2 = 1 + I$, $z_3 = -1 - 3I$, $z_4 = 4$.

3. Proszę zaimplementować metodę iterowanego dzielenia do znalezienia zer wielomianu. Przydatny może być poniższy pseudokod

$$
\begin{aligned}
inicjalizacja: \quad & \vec{a} = \ldots \\
& z_0 = \ldots \\
& for(l = n; l >= 1; l--)\{ \\
& \quad z_j = z_0 \\
& \quad for(j = 1; j <= IT\_MAX; j++)\{ \\
& \quad\quad R_j = \ldots \\
& \quad\quad R_j' = \ldots \\
& \quad\quad z_j = \ldots \\
& \quad \} \\
& \quad \vec{a} = \vec{b} \quad \text{(deflacja wielomianu czynnikiem liniowym)} \\
& \}
\end{aligned}
$$

   gdzie:

   - z_0 - punkt startowy (może być taki sam dla wszystkich zer)
   - l - określa numer wyznaczanego zera, po jego znalezieniu obniżamy stopień wielomianu o 1 (przepisanie wektora $\vec{b}$ do $\vec{a}$)
   - j - licznik pętli iteracyjnej,
   - IT_MAX - ograniczenie na maksymalną liczbę iteracji dla pojedynczego zera.

4. Proszę wyznaczyć iteracyjnie wszystkie zera wielomianu o współczynnikach (12)-(15) przyjmując $IT\_MAX = 20$ oraz $z_0 = 0 + 0I$. Obliczenia proszę powtórzyć dla $z_0 = -10 - 10I$. Dla każdego z_0 oraz l i j do pliku proszę zapisać aktualną wartość z_j.

5. Dla każdej wartości z_0 proszę sporządzić jeden rysunek przedstawiający kolejne przybliżenia z_j (dla każdego zera) na płaszczyźnie zespolonej (tj. w układzie x-y, $x = Re\{z\}$ oraz $y = Im\{z\}$).

6. W sprawozdaniu proszę przeanalizować wpływ z_0 na kolejność znajdowanych zer oraz liczbę iteracji potrzebnych do wyznaczenia zer.

3 Uwagi

1. Do wyznaczenia R_j można wykorzystać funkcję (należy ją sobie utworzyć), do której przekazujemy: $\vec{a}$, $\vec{b}$, z_j, l (aktualny stopień wielomianu o współczynnikach $\vec{a}$ uwzględniający deflację). Funkcja ta oprócz zwracania R_j powinna też obliczyć współczynniki $\vec{b}$.

2. Do wyznaczenia $R_j^{'}$ można wykorzystać tę samą funkcję co dla R_j, ale przekazujemy do niej: $\vec{b}$, $\vec{c}$, z_j, $l-1$ (aktualny stopień wielomianu o współczynniki $\vec{b}$)