

Wyznaczanie zespolonych zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia i metodą siecznych.

Tomasz Chwiej

10 kwietnia 2018

1 Wstęp

Dany jest **wielomian zespolony**, którego zera chcemy znaleźć:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0 = 0 \quad (1)$$

Jeśli podzielimy wielomian przez wyraz $(z - z_j)$ to otrzymamy:

$$f(z) = (z - z_j)(b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_0) + R_j \quad (2)$$

Współczynniki nowego wielomianu $\{b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0\}$ oraz reszty dzielenia R_j wyznaczamy rekurencyjnie

$$b_n = 0 \quad (3)$$

$$b_k = a_{k+1} + z_j b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 0 \quad (4)$$

$$R_j = a_0 + z_j b_0 \quad (5)$$

W metodzie iterowanego dzielenia połączonej z metodą siecznych, kolejne (oczekujemy że lepsze) przybliżenie wyznaczamy zgodnie z wzorem

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j(z_j - z_{j-1})}{R_j - R_{j-1}} \quad (6)$$

Z wzoru tego wynika, że metoda jest **dwukrokowa**, potrzebujemy dwóch poprzednich przybliżeń z_j i z_{j-1} oraz R_j i R_{j-1} aby wyznaczyć nowe z_{j+1} i R_{j+1} .

2 Zadania do wykonania

1. Obliczenia prowadzimy używając liczb zespolonych. W tym celu należy do kodu dołączyć plik nagłówkowy

```
#include<complex.h>
```

Deklaracja użycia zmiennej zespolonej z inicjalizacją w C, wyznaczenia części rzeczywistej i urojonej oraz modułu i argumentu (fazy) a także sprzężenia zespolonego

```
double complex z = 89.0 + 68.I;
double a_r= creal(z);
double a_i= cimag(z);
double a_abs= cabs(z);
double complex z_conjg= conj(z);
```

Tworzenie i wypełnianie elementów tablic - analogicznie. Współczynniki wielomianów zapisujemy w wektorach: $\vec{a}$ i $\vec{b}$ indeksowanych od 0 - tak będzie wygodniej.

2. Będziemy poszukiwać zer wielomianu 4 stopnia o współczynnikach:

$$a_0 = 16 + 8I \quad (7)$$

$$a_1 = -20 + 14I \quad (8)$$

$$a_2 = 4 - 8I \quad (9)$$

$$a_3 = -4 + I \quad (10)$$

$$a_4 = 1 + 0I \quad (11)$$

Dokładne położenia zer (do testów programu): $z_1 = I$, $z_2 = 1 + I$, $z_3 = -1 - 3I$, $z_4 = 4$.

3. Proszę zaimplementować metodę iterowanego dzielenia do znalezienia zer wielomianu. Przydatny może być poniższy pseudokod

```
inicjalizacja :    $\vec{a}$ ,  $z_0$ ,  $z_1$ 
                  for( $l = n$ ;  $l \geq 1$ ;  $l--$ ){
                    for( $j = 1$ ;  $j \leq IT\_MAX$ ;  $j++$ ){
                      if( $j == 1$ ){//inicjalizacja punktów startowych
                         $z_{j-1} = z_0$ 
                         $z_j = z_1$ 
                         $R_{j-1} = \dots$ 
                         $R_j = \dots$ 
                      }
                       $z_{j+1} = \dots$ 
                       $R_{j+1} = \dots$ 
                      if( $|z_{j+1} - z_j| < \alpha_{min}$ )break; //przerwanie pętli
                      //poniżej zachowujemy dane do kolejnej iteracji
                       $z_{j-1} = z_j$ ;
                       $z_j = z_{j+1}$ ;
                       $R_{j-1} = R_j$ ;
                       $R_j = R_{j+1}$ ;
                    }
                     $\vec{a} = \vec{b}$  (deflacja wielomianu czynnikiem liniowym)
                  }
```

gdzie:

- z_0 - (pierwszy) punkt startowy (może być taki sam dla wszystkich zer)
 - z_1 - (drugi) punkt startowy (może być taki sam dla wszystkich zer)
 - l - określa numer wyznaczanego zera, po jego znalezieniu obniżamy stopień wielomianu o 1 (przepisanie wektora $\vec{b}$ do $\vec{a}$)
 - j - licznik pętli iteracyjnej,
 - IT_MAX - ograniczenie na maksymalną liczbę iteracji dla pojedynczego zera,
 - α_{min} - liczba określająca dokładność wyznaczanych zer
4. Proszę wyznaczyć iteracyjnie wszystkie zera wielomianu o współczynnikach (7)-(11) przyjmując parametry: $IT_MAX = 20$, $z_0 = 0 + 0I$, $z_1 = 0.1 + 0.1I$, $\alpha_{max} = 10^{-10}$. Dla każdego l i j do pliku proszę zapisać aktualną wartość z_j .
 5. Proszę sporządzić jeden rysunek przedstawiający kolejne przybliżenia z_j (dla każdego zera) na płaszczyźnie zespolonej (tj. w układzie x-y, $x = Re\{z\}$ oraz $y = Im\{z\}$).
 6. W sprawozdaniu proszę przeanalizować wpływ z_0 i z_1 na kolejność znajdowanych zer oraz liczbę iteracji potrzebnych do wyznaczenia zer.

3 Uwagi

1. Do wyznaczenia R_j można wykorzystać funkcję (należy ją sobie utworzyć), do której przekazujemy: $\vec{a}$, $\vec{b}$, z_j , l (aktualny stopień wielomianu o współczynnikach $\vec{a}$ uwzględniający deflację). Funkcja ta oprócz zwracania R_j powinna też obliczyć współczynniki $\vec{b}$.