Odszumianie sygnału przy użyciu FFT - splot funkcji

Tomasz Chwiej

14 stycznia 2014

1 Wstęp

Splot dwóch funkcji definiujemy jako:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{1}$$

Jeśli funkcję $f(t)$ potraktujemy jako sygnał a funkcję $g(t)$ jako wagę, to splot obu funkcji możemy potraktować jako uśrednienie funkcji f pewną ustaloną funkcją wagową g. Wykorzystamy ten fakt do wygładzenia zaszumionego sygnału. Aby przeprowadzić efektywnie obliczenia, do obliczenia splotu wykorzystamy FFT:

$$FFT\{f(t) * g(t)\} = FFT\{f\} \cdot FFT\{g\} = f(k) \cdot g(k) \tag{2}$$

$$f * g = FFT^{-1}\{f(k) \cdot g(k)\} \tag{3}$$

Jako sygnał przyjmiemy:

$$f(t) = f_0(t) + \Delta \tag{4}$$

gdzie:

$$f_0(t) = sin(1 \cdot \omega t) + sin(2 \cdot \omega t) + sin(3 \cdot \omega t) \tag{5}$$

jest sygnałem niezaburzonym,

$\omega = 2\pi/T$ - pulsacja, T - okres, Δ jest liczbą pseudolosową z zakresu $[-1/2,\ 1/2]$.

Jako funkcję wagową przyjmiemy funkcje gaussowską:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6}$$

2 Uwagi

1. FFT liczymy przy użyciu procedury **four1(float dane[ ],int n, isign)** z Numerical Recipes. Tablica **dane**[ ] to wektor o długości $2 \cdot n$, w którego nieparzystych komórkach $(j = 2 \cdot i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ wpisujemy wartości rzeczywiste sygnału dla kolejnych chwil czasowych $t_i = dt \cdot (i-1),\ i = 1, 2, \ldots, n$, a w sąsiadujących komórkach parzystych $(j = 2 \cdot i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ część urojoną (jeśli jest różna od zera - w naszym przypadku jest zerem). Zmiennej **isign** należy przypiasć wartość $+1$ gdy wykonujemy FFT lub -1 gdy liczymy FFT^{-1} (transformata odwrotna).

2. Ponieważ będziemy operować dla chwil czasowych $t \in [0, t_{max}]$ więc funkcja $g(t)$ będzie tylko "połówką" pełnej funkcji gaussowskiej (ponieważ jej środek wypada w $t = 0$). Dlatego w obliczeniach musimy dodać drugą "połówkę". Licząc $g_1(k)$ stosujemy wzór:

$$g_1(k) = FFT\{g(t>0)\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(t_i) exp\left(-\frac{2\pi I \cdot k \cdot i}{N}\right) \tag{7}$$

Natomiast licząc $g_2(k) = FFT\{g(t<0)\}$ musimy zmienić znak przy t ($g(t) = g(-t)$ ze względu na symetrię):

$$g_2(k) = FFT\{g(t<0)\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(t_i) exp\left(+\frac{2\pi I \cdot k \cdot i}{N}\right) = FFT^{-1}\{g(t>0)\} \tag{8}$$

Wniosek: zmiast $g(k) = FFT\{g(t)\}$ do liczenia splotu musimy użyć sumy dwóch transformat:

$$g(k) = g_1(k) + g_2(k) = FFT\{g(t)\} + FFT^{-1}\{g(t)\} \tag{9}$$

3. W tablicach trzymających wartości funkcji $f(t)$ i $g(t)$ naprzemieniennie wpisane są części: rzeczywiste i urojone liczb zespolonych. Licząc splot musimy obliczyć ich ilocznyn ($z_1 = a_1 + Ib_1$ oraz $z_2 = a_2 + Ib_2$):

$$\begin{aligned} a_1 &= f[2*i-1] \quad //Re\{f(k_i)\} \\ b_1 &= f[2*i] \quad //Im\{f(k_i)\} \\ a_2 &= g[2*i-1] \quad //Re\{g(k_i)\} \\ b_2 &= g[2*i] \quad //Im\{g(k_i)\} \\ f[2*i-1] &= a_1*a_2 - b_1*b_2 \quad //Re\{f(k_i)\cdot g(k_i)\} \\ f[2*i] &= a_1*b_2 + a_2*b_1 \quad //Im\{f(k_i)\cdot g(k_i)\} \end{aligned}$$

Po wykonaniu powyższej operacji tablicę $f[\ ]$ musimy poddać transformacji odwrotnej (FFT^{-1}), aby odzyskać rzeczywistą tablicę zawierającą splot.

3 Zadania do wykonania

Przyjmujemy parametry: $N_k = 2^k, k = 8, 10, 12$ - liczba węzłów, $T = 1.0$, $t_{max} = 3T$ - maksymalny okres czasu trwania sygnału, $dt = t_{max}/N_k$ - krok czasowy, $\sigma = T/20$.

Tworzymy pętlę zewnętrzną po $k = 8, 10, 12$, wyznaczamy w niej N_k, i tworzymy tablice (o długości $2 \cdot N_k$): a) $f_0[\ ]$ dla sygnału bez szumu (wzór 5), b) $f[\ ]$ dla sygnału z szumem (wzór 4), c) dwie tablice dla funkcji wagowej: g_1 i g_2 - **do obu wpisujemy te same wartości (wzór 6)**. W pętli (po k) należy dalej:

1. Wypełnić tablice odpowiednimi wartościami
2. Obliczyć transformaty: $f_k = FFT\{f\}$, $g_1(k) = FFT\{g_1\}$, $g_2(k) = FFT^{-1}\{g_2\}$
3. Obliczyć transformatę splotu czyli iloczyn: $f_k \cdot (g_1(k) + g_2(k))$, wynik wpisać do tablicy $f[\ ]$
4. Obliczyć: $FFT^{-1}\{f(k)\}$ - w tablicy pojawi się wówczas splot $f(t) * g(t)$ (czyli wygładzona funkcja $f(t)$)
5. Dla tablicy $f[\ ]$ znaleźć element o maksymalnym module $f_{max} = max\{|f[2*i-1]|,\ i = 1, \ldots, n\}$
6. Zapisać do pliku: sygnał niezaburzony (tablica $f_0[\ ]$) oraz splot (tablica $f[\ ] * 2.5/f_{max}$ - normalizacja)

Po wygenerowaniu plików z danymi proszę dla każdego N_k zrobić rysunek przedstawiający wykresy: sygnału niezaburzonego i znormalizowanego splotu. W sprawozdaniu proszę odpowiedzieć na pytanie: dlaczego wykresy nie pokrywają się dla każdego t_i? Czy jakość wygładzania zależy od ilości elementów w tablicy (tj. przy ustalonym czasie generowania sygnału $t_{max} = 3T$ od częstości jego próbkowania dt)?