Generowanie ciągu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym w kuli 3D.

Tomasz Chwiej

11 czerwca 2019

1 Zadania do wykonania

1.1 Generator o rozkładzie jednorodnym $U(0,1)$

1. Wylosować $N = 2000$ liczb pseudolowych z generatora multiplikatywnego

$$X_i = \, a \, X_{i-1} \, mod \, m \tag{1}$$

które należy unormować

$$x_i = \frac{X_i}{m + 1.0} \tag{2}$$

dla dwóch przypadków:

- $U_1(0,1)$: $a = 17$, $m = 2^{13} - 1$, $X_0 = 10$
- $U_2(0,1)$: $a = 85$, $m = 2^{13} - 1$, $X_0 = 10$

Dla każdego generatora należy utworzyć oddzielną funkcję, która powinna zwracać liczbę typu **double** tj. $x \in U(0,1)$

```
double gen_1(){
   static long int x=10;
   int a=...;
   int c=...;
   long int m=...;
   x=(a*x+c) % m;
   return x/(m+1.0);
}
```

Uwaga: w powyższym kodzie parametr **static** pozwala zachować w pamięci ostatnią wartość x pomiędzy wywołaniami funkcji. Wygenerowane liczby dla $U_1(0,1)$ i $U_2(0,1)$ zapisać w jednowymiarowych n-elementowych tablicach a następnie korzystając z nich należy sporządzić dwuwymiarowe wykresy kolejnych par: (x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+2}), (x_i, x_{i+3}) dla obu generatorów.

2. Wylosować $N = 2000$ liczb pseudolowych z generatora multiplikatywnego $U_3(0,1)$

$$X_i = (1176 \cdot X_{i-1} + 1476 \cdot X_{i-2} + 1776 \cdot X_{i-3}) \, mod \, (2^{32} - 5) \tag{3}$$

i unormować. Na starcie można przyjąć $X_0 = X_{-1} = X_{-2} = 10$.

Sporządzić dwuwymiarowe wykresy kolejnych par: (x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+2}),(x_i, x_{i+3}) dla generatora.

1.2 Rozkład jednorodny w kuli 3D: $K^3(0,1)$

1. Stosując metodę Boxa-Mullera należy utworzyć $N = 2000$ trzywymiarowych wektorów ($\vec{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$) o rozkładzie normalnym

$$\begin{aligned} u_1 &\in U_3(0,1) && (4)\\ u_2 &\in U_3(0,1) && (5)\\ x_i &= \sqrt{-2\ln(1-u_1)}\cos(2\pi u_2) && (6)\\ y_i &= \sqrt{-2\ln(1-u_1)}\sin(2\pi u_2) && (7)\\ u_3 &\in U_3(0,1) && (8)\\ u_4 &\in U_3(0,1) && (9)\\ z_i &= \sqrt{-2\ln(1-u_3)}\cos(2\pi u_4) && (10) \end{aligned}$$

   i znormalizować długości wektorów do 1 stosując normę euklidesową

$$\vec{r}_i \leftarrow \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|_2} \quad (11)$$

   Wygenerowane punkty w przestrzeni 3D powinny znajdować się teraz na powierzchni sfery. Zapisać wektory do pliku i sporządzić przykładowy rysunek 3D pokazujący ich rozkład na sferze, np. w Gnuplocie (poniżej część skryptu generującego wykres 3D)

```
set xyplane -1
set border 4095
splot 'dane.dat' u 1:2:3 w p
```

2. Dysponując rozkładem jednorodnym na sferze, dla każdego punktu (wektora w 3D) generujemy zmienną o rozkładzie jednomianowym $h_d(s) = d \cdot s^{d-1}, \quad d = 3$ (d określa liczbę wymiarów) i $s \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} u_i &\in U_3(0,1) && (12)\\ s_i &= (u_i)^{\frac{1}{d}} && (13)\\ \vec{r}_i &= [s_i \cdot x_i, s_i \cdot y_i, s_i \cdot z_i] && (14) \end{aligned}$$

   Po wykonaniu powyższych czynności punkty $\vec{r}_i$ powinny być rozłożone równomiernie w kuli. Zapisać wektory $\vec{r}_i$ do pliku i sporządzić wykres 3D jak dla sfery.

3. Sprawdzamy czy rozkład punktów w kuli jest jednorodny tj. czy gęstość losowanych punktów jest stała w obszarze kuli. W tym celu dzielimy promień kuli na $K = 10$ podprzedziałów o równej długości, a następnie dla każdego punktu określamy jego przynależność do konkretnego przedziału

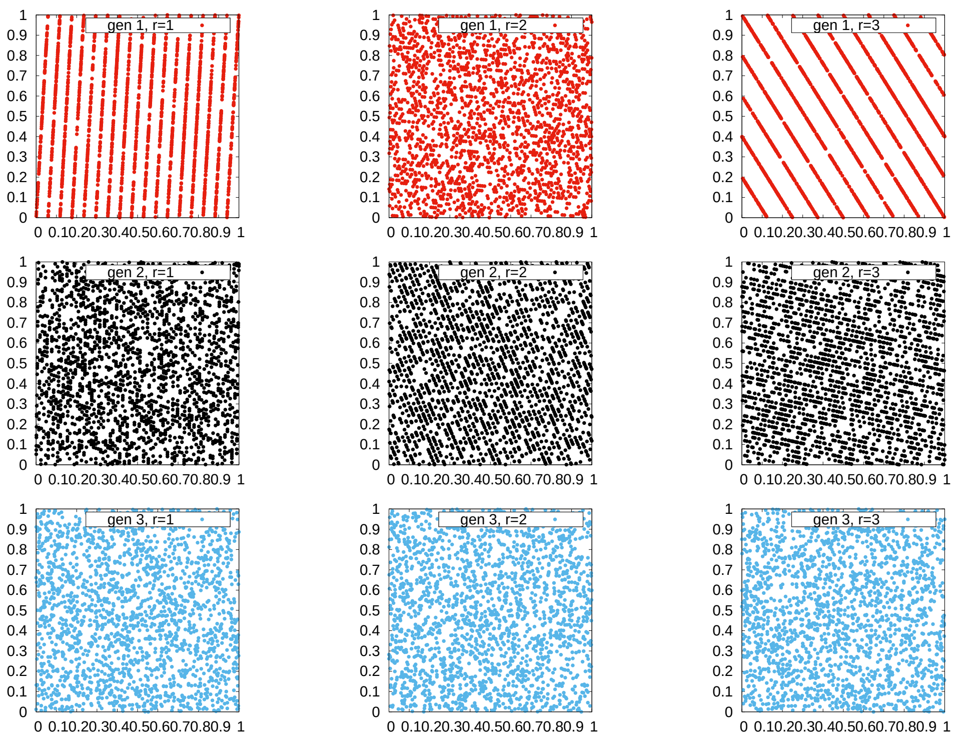
$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{K} && (15)\\ j &= (int)\left(\frac{\|\vec{r}_i\|_2}{\Delta}\right) + 1 \quad \text{(indeks przedziału, j=1,2,...,K)} && (16)\\ & n_j{+}{+} && (17) \end{aligned}$$

   Gęstość (g_j) liczymy jako ilość liczb wpadających do danego przedziału podzieloną przez jego objętość

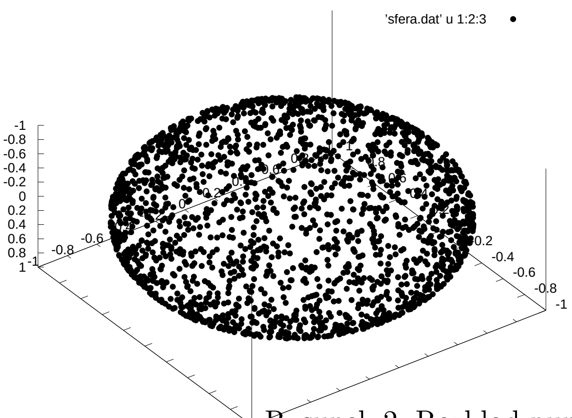
$$
\begin{aligned}
R_j &= \Delta \cdot j & (18)\\
R_{j-1} &= \Delta \cdot (j-1) & (19)\\
V_j &= \frac{4}{3}\pi R_j^3 & (20)\\
V_{j-1} &= \frac{4}{3}\pi R_{j-1}^3 & (21)\\
g_j &= \frac{n_j}{V_j - V_{j-1}} & (22)
\end{aligned}
$$

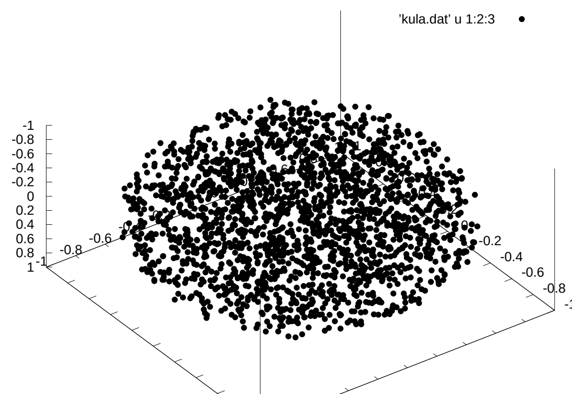
Do pliku proszę zapisać wartości n_j oraz g_j dla: $N = 2000$ oraz $N = 10^4$ i $N = 10^7$. Różnice w wartościach g_1 proszę skomentować w sprawozdaniu w oparciu o zmianę wartości n_1 dla tych trzech serii danych.

Przykładowe wyniki:



Rysunek 1: Rozkłady przestrzenne par punktów: (x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+2}), (x_i, x_{i+2}) (kolumny odpowiednio: lewa, środkowa i prawa), dla generatorów $U_1(0,1)$ (wiersz górny), $U_2(0,1)$ (wiersz środkowy) i $U_3(0,1)$ (wiersz dolny).





Rysunek 2: Rozkład punktów na sferze (lewy) i w kuli (prawy).