Odszumianie sygnału przy użyciu FFT - splot funkcji

Tomasz Chwiej

22 maja 2018

1 Wstęp

Splot dwóch funkcji definiujemy jako:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

Jeśli funkcję $f(t)$ potraktujemy jako sygnał a funkcję $g(t)$ jako wagę, to splot obu funkcji możemy potraktować jako uśrednienie funkcji f pewną ustaloną funkcją wagową g. Wykorzystamy ten fakt do wygładzenia zaszumionego sygnału. Aby przeprowadzić efektywnie obliczenia, do obliczenia splotu wykorzystamy FFT:

$$FFT\{f(t) * g(t)\} = FFT\{f\} \cdot FFT\{g\} = f(k) \cdot g(k) \tag{2}$$

$$f * g = FFT^{-1}\{f(k) \cdot g(k)\} \tag{3}$$

Jako sygnał przyjmiemy:

$$f(t) = f_0(t) + \Delta \tag{4}$$

gdzie:

$$f_0(t) = sin(1 \cdot \omega t) + sin(2 \cdot \omega t) + sin(3 \cdot \omega t) \tag{5}$$

jest sygnałem niezaburzonym,

$\omega = 2\pi/T$ - pulsacja, T - okres, Δ jest liczbą pseudolosową z zakresu $[-1/2,\ 1/2]$.

Jako funkcję wagową przyjmiemy funkcje gaussowską:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6}$$

2 Uwagi

1. FFT liczymy przy użyciu procedury
   gsl_fft_complex_radix2_forward(double dane[], size_t stride, size_t N)
   a transformację odwrotną
   gsl_fft_complex_radix2_backward(double dane[], size_t stride, size_t N)
   z biblioteki GSL, gdzie:

   - Tablica **dane**[ ] to wektor typu double o długości $2 \cdot N$ ($N = 2^k$), w którego parzystych komórkach ($j = 2 \cdot i,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$) wpisujemy wartości rzeczywiste sygnału dla kolejnych chwil czasowych $t_i = dt \cdot i,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$, a w sąsiadujących komórkach nieparzystych ($j = 2 \cdot i + 1,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$) część urojoną (jeśli jest różna od zera - w naszym przypadku jest zerem).
   - Uwaga: w tablicy **dane** zwracany jest wynik czyli transformata (wariant: forward) lub transformata odwrotna (wariant: backward)
   - Trasformcję wykonujemy na komórkach $dane[i + stride]$. Jeśli $stride > 1$ to zazwyczaj poddajemy transformacji funkcję dwóch lub więcej zmiennych. Przyjmujemy $stride = 1$ (1D).

- W programie dołączamy pliki nagłówkowe gsl_errno.h i gsl_fft_complex.h.

2. Ponieważ będziemy operować dla chwil czasowych $t \in [0, t_{max}]$ więc funkcja $g(t)$ będzie tylko "połówką" pełnej funkcji gaussowskiej (ponieważ jej środek wypada w $t = 0$). Dlatego w obliczeniach musimy dodać drugą "połówkę". Licząc $g_1(k)$ stosujemy wzór:

$$g_1(k) = FFT\{g(t > 0)\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(t_i) exp\left(-\frac{2\pi I \cdot k \cdot i}{N}\right) \tag{7}$$

   Natomiast licząc $g_2(k) = FFT\{g(t < 0)\}$ musimy zmienić znak przy t ($g(t) = g(-t)$ ze względu na symetrię):

$$g_2(k) = FFT\{g(t < 0)\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(t_i) exp\left(+\frac{2\pi I \cdot k \cdot i}{N}\right) = FFT^{-1}\{g(t > 0)\} \tag{8}$$

   Wniosek: zmiast $g(k) = FFT\{g(t)\}$ do liczenia splotu musimy użyć sumy dwóch transformat:

$$g(k) = FFT\{g(t)\} + FFT^{-1}\{g(t)\} \tag{9}$$

3. W tablicach trzymających wartości funkcji $f(t)$ i $g(t)$ naprzemieniennie wpisane są części: rzeczywiste i urojone liczb zespolonych. Licząc splot musimy obliczyć ich iloczynn ($z_1 = a_1 + ib_1$ oraz $z_2 = a_2 + ib_2$):

$$\begin{aligned}
a_1 &= f[2 \cdot i] \quad //Re\{f(k_i)\} \\
b_1 &= f[2 \cdot i + 1] \quad //Im\{f(k_i)\} \\
a_2 &= g[2 \cdot i] \quad //Re\{g(k_i)\} \\
b_2 &= g[2 \cdot i + 1] \quad //Im\{g(k_i)\} \\
f[2 \cdot i] &= a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 \quad //Re\{f(k_i) \cdot g(k_i)\} \\
f[2 \cdot i + 1] &= a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \quad //Im\{f(k_i) \cdot g(k_i)\}
\end{aligned}$$

   Po wykonaniu powyższej operacji tablicę $f[\ ]$ musimy poddać transformacji odwrotnej (FFT^{-1}), aby odzyskać rzeczywistą tablicę zawierającą splot.

3 Zadania do wykonania

Przyjmujemy parametry: $N = 2^k$ to całkowita liczba węzłów gdzie $k = 8, 10, 12$, $T = 1.0$, $t_{max} = 3T$ - maksymalny okres czasu rejestracji sygnału, $dt = t_{max}/N$ - krok czasowy, $\sigma = T/20$. Tworzymy pętlę zewnętrzną po $k = 8, 10, 12$, wyznaczamy w niej N, i tworzymy tablice (o długości $2 \cdot N$): a) $f_0[\ ]$ dla sygnału bez szumu (wzór 5), b) $f[\ ]$ dla sygnału z szumem (wzór 4), c) dwie tablice dla funkcji wagowej: g_1 i g_2 - **do obu wpisujemy te same wartości (wzór 6)**. W pętli (po k) należy dalej:

1. Wypełnić tablice odpowiednimi wartościami. Liczbę pseudolosową $\Delta \in U(-0.5, 0.5]$ generujemy następująco

$$\Delta = \frac{rand()}{RAND\_MAX + 1.0} - \frac{1}{2} \tag{10}$$

2. Obliczyć transformaty: $f(k) = FFT\{f(t)\}$, $g_1(k) = FFT\{g_1(t)\}$, $g_2(k) = FFT^{-1}\{g_2(t)\}$

3. Obliczyć transformatę splotu czyli iloczyn: $f(k) \cdot (g_1(k) + g_2(k))$, wynik wpisać do tablicy $f[\ ]$

4. Obliczyć: $FFT^{-1}\{f(k)\}$ - w tablicy pojawi się wówczas splot $f(t) * g(t)$ (czyli wygładzona funkcja $f(t)$)

5. Dla tablicy $f[\ ]$ znaleźć element o maksymalnym module $f_{max} = max\{|f[2 \cdot i]|,\ i = 0, \ldots, N - 1\}$

6. Zapisać do pliku: sygnał niezaburzony (tablica $f_0[\,]$), sygnał zaburzony oraz splot (tablica $f[\,] * 2.5/f_{max}$ - normalizacja)

Po wygenerowaniu plików z danymi proszę dla każdego N zrobić 2 rysunki przedstawiające: a) sygnał zaburzony i znormalizowany splot oraz b) sygnał niezaburzony i znormalizowany splot. W sprawozdaniu proszę odpowiedzieć na pytanie: dlaczego wykresy nie pokrywają się dla każdego t_i? Czy jakość wygładzania zależy od ilości elementów w tablicy (tj. przy ustalonym czasie generowania sygnału $t_{max} = 3T$ od częstości jego próbkowania dt)?

Przykładowe wyniki dla $k = 8$: