Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Tomasz Chwiej

17 kwietnia 2018

1 Wstęp

Dla funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

należy przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona. Wzór interpolacyjny zapiszemy w postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \Pi_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \tag{2}$$

gdzie: $f^{(j)}(x_0)$ to iloraz rzędu j liczony dla węzła x_0, a x_i są położeniami węzłów.
Wartości ilorazów różnicowych wyznaczamy zgodnie z poniższą (prawą) tabelką

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_1 & f^{(1)}_{x_0,\ldots} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 & f^{(1)}_{x_1} & f^{(2)}_{x_0} & 0 & 0 & 0 \\
y_3 & f^{(1)}_{x_2} & f^{(2)}_{x_1} & f^{(3)}_{x_0} & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\
y_n & f^{(1)}_{x_{n-1}} & f^{(2)}_{x_{n-2}} & f^{(3)}_{x_{n-3}} & \ldots & f^{(n)}_{x_0} \\
\hline
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
f_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f_{1,0} & f_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f_{2,0} & f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\
f_{3,0} & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\
f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \ldots & f_{n,n} \\
\hline
\end{array} \tag{3}$$

gdzie: zerowa kolumna (y_i) to wartości funkcji w węzłach, a elementy $f_{j,j}$ to ilorazy różnicowe rzędu j występujące we wzorze (2).
Do wyznaczenia prawej tabelki użyjemy pseudokodu

$$\begin{array}{l}
for(j = 1; j <= n; j++)\{ \\
\quad for(i = j; i <= n; i++)\{ \\
\quad\quad f_{i,j} = \dfrac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}; \\
\quad \} \\
\}
\end{array}$$

Mając wartości ilorazów różnicowych możemy zastosować wzór interpolacyjny (2) do wyznaczenia przybliżonych wartości funkcji w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$

2 Zadania do wykonania

1. Węzły indeksujemy $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Interpolację wykonujemy kolejno dla $n = 5,\ 10,\ 15,\ 20$.

2. Dla przedziału $x \in [-5, 5]$, określamy liczbę węzłów jako $n+1$, ustalamy położenia węzłów (równoodległe) i wyznaczamy wartości funkcji (1) w węzłach.

3. Wyznaczamy niezerowe elementy prawej tabelki (3).

4. Dla każdego n sporządzamy wykresy funkcji $f(x)$ i wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ na jednym rysunku.

5. Punkty 1-4 powtarzamy dla zoptymalizowanych położeń węzłów (podmieniamy tylko instrukcję określającą położenia węzłów)

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max})\cos\left(\pi\frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{4}$$

   które są zerami wielomianów Czebyszewa.