Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jakobiego.

Tomasz Chwiej

21 października 2011

1 Problem

Chcemy znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 sin(\Omega t) \tag{1}$$

które opisuje ruch ciała poddanego działaniu siły sprężystej ($-\omega^2 x$), siły tarcia ($-\beta V$) zależnej od prędkości oraz siły wymuszającej ruch ($F_0 sin(\Omega t)$).

Ponieważ problem rozwiązywany jest w czasie więc wprowadzamy siatkę, której węzłami są kolejne chwile czasowe:

$$t = t_i = h * i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Więc nasze rozwiązanie $x(t)$ będzie określone dla położeń węzłowych tj. $x(t) = x_{t_i} = x_i$

Drugą pochodną zamieniamy na symetryczny trójpunktowy iloraz różnicowy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} \tag{3}$$

gdzie: h oznacza krok czasowy na siatce

Ponieważ prędkość jest pierwszą pochodną położenia po czasie więc ją także zastępujemy ilorazem różnicowym (dwupunktowym niesymetrycznym):

$$V_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \tag{4}$$

I wstawiamy do równania różniczkowego:

$$\frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} = -\omega^2 x_i - \beta V_i + F_0 sin(\Omega h i) \tag{5}$$

Przenosimy wyrazy z niewadomymi x_i na lewą stronę (zamieniając prędkość na iloraz różnicowy) a na prawej pozostawiamy wyraz wolny:

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + \omega^2 h^2 x_i + \beta h(x_{i+1} - x_i) = F_0 sin(\Omega h i) h^2 \tag{6}$$

Co można zapisać w symbolicznie:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i \tag{7}$$

gdzie: $a_1 = 1$, $a_2 = \omega^2 h^2 - 2 - \beta h$, $a_3 = 1 + \beta h$, $b_i = F_0 sin(\Omega h i) h^2$

Dostaliśmy układ równań postaci $Ax = b$.

Aby rozwiązać równanie różniczkowe drugiego rzędu musimy podać dwa warunki początkowe: a) na wychylenie $x(t = 0) = x_0 = 1$ oraz prędkość początkową $V(t = 0) = V_0 = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = 0$ Te dwa dodatkowe równania musimy dołączyć do naszego układu równań który przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2 Metoda Jakobiego

Ponieważ macież układu równań (Ax=b) jest trójprzekątniowa (macierz rzadka), więc można ją przechowywać w pamięci w postaci trzech n-elementowych wektorów:

$$d_0 = [1, 1, a_3, a_3, \ldots, a_3] \tag{9}$$

$$d_1 = [0, -1, a_2, a_2, \ldots, a_2] \tag{10}$$

$$d_2 = [0, 0, a_1, a_1, \ldots, a_1] \tag{11}$$

Aby w metodzie Jakobiego wyznaczyć i-ty element nowego przybliżenia ($x_n[i]$) dysponując przybliżeniem z poprzedniej iteracji (wektor x_s) należy wykonać poniższą operację:

$$x_n[i] = \frac{1}{d_0[i]} \left(b[i] - d_1[i]x_s[i-1] - d_2[i]x_s[i-2]\right) \tag{12}$$

dla każdego $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Uwaga: elementy wektora x_s są indeksowane od -2, wartości $x_s[-2]$ i $x_s[-1]$ mogą być dowolne.

3 Zadania do wykonania:

Przyjąć parametry: $V_0 = 0$, $x_0 = 1$, $\omega = 1$, liczba kroków czasowych $n = 1000$, $h = 0.02$. a następnie znaleźć rozwiązanie układu równań iteracyjną metodą Jakobiego dla trzech przypadków:

1. $\beta = 0.0$, $F_0 = 0.0$ $\Omega = 0.8$
2. $\beta = 0.4$, $F_0 = 0.0$ $\Omega = 0.8$
3. $\beta = 0.4$, $F_0 = 0.1$ $\Omega = 0.8$

Wyniki powinny być podobne do poniższych