

Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położeń węzłów.

Tomasz Chwiej

14 kwietnia 2020

1 Wprowadzenie

Naszym zadaniem jest znalezienie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a ($W_n(x)$) dla funkcji:

$$y(x) = \exp(-x^2) \quad (1)$$

w przedziale $x \in [-5, 5]$.

Czyli dla wektora położeń węzłów interpolacji $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ oraz wartości **funkcji interpolowanej** $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ wykorzystujemy wzór z wykładu (strona 8)

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)} \quad (2)$$

gdzie $\omega_n(x)$ to wielomian czynnikiowy (stopnia $n + 1$)

$$\omega_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (3)$$

a $\omega'_n(x)$ jest pochodną wielomianu czynnikiowego (stopnia n) liczoną w punkcie x_j

$$\omega'_n(x_j) = (x_j - x_0) \cdot (x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n) \quad (4)$$

Wycinek pseudokodu pozwalający wyznaczyć wartość interpolowaną w położeniu międzywęzłowym

inicjalizacja :

$x = \dots$ – wartość argumentu dla którego liczymy $W_n(x)$

wielomian=0 – zerujemy zmienną w której zachowujemy sumę $W_n(x)$

for (j=0; j<=n; j++){

licznik=1.0 // wartość 1 jest neutralna dla iloczynu
mianownik=1.0

// pętla w której obliczamy iloczyny (licznik i mianownik)
// pojedynczy wyraz sumy

```

for ( i=0; i<=n; i++){
    licznik = licznik * (x - xj)
    if ( i != j ) mianownik = mianownik * (xi-xj) // pomijamy element (xj - xj)
}

// sumowanie wkładów od poszczególnych węzłów yj

wielomian = wielomian +  $\frac{y_j}{x-x_j} \cdot \frac{licznik}{mianownik}$ 

}

```

2 Zadania do wykonania

1. Zaprogramować na komputerze metodę wyznaczającą przybliżoną wartość funkcji w położeniu międzywęzłowym wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange'a (pseudokod). Argumentami metody niech będą: wektor węzłów ($\mathbf{x}$), wektor wartości funkcji w węzłach ($\mathbf{y}$), stopień wielomianu n (zawsze o jeden niższy niż całkowita liczba węzłów) oraz wartość argumentu x dla którego wyliczamy wartość funkcji (wielomianu).
2. Przeprowadzić interpolację funkcji (1) dla $n = 5, 10, 15, 20$. Węzły mają być równoodległe. Pierwszy i ostatni węzeł mają wyznaczać krańce przedziału interpolacji. Dla każdego n proszę sprządzić wykresy funkcji (1) oraz wielomianu interpolacyjnego na jednym rysunku (będą 4 oddzielne rysunki). Na krańcach przedziału interpolacji pojawiają się silne oscylacje wielomianu interpolacyjnego (tzw. efekt Rungego - patrzy wykład).
3. Optymalizujemy położenia węzłów. Określamy położenia węzłów jako zera wielomianów Czebyszewa:

$$x_m = \frac{1}{2} \left[(x_{max} - x_{min}) \cos \left(\pi \frac{2m+1}{2n+2} \right) + (x_{min} + x_{max}) \right], \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

gdzie: x_{min} i x_{max} to krańce przedziału interpolacji, a $(n+1)$ jest całkowitą liczbą węzłów oraz stopniem wielomianu Czebyszewa. Po optymalizacji położień węzłów proszę powtórzyć interpolację dla tych samych wartości n co w punkcie 2. Sporządzić wykresy funkcji $f(x)$ oraz $W_n(x)$ na jednym rysunku (4 kolejne rysunki).