Rozkład LU macierzy trójdiagonalnej - rozwiązanie równania Poissona w jednym wymiarze

Tomasz Chwiej

7 marca 2019

1 Postawienie problemu

Naszym zadaniem będzie rozwiązanie równania Poissona:

$$\nabla^2 V(x) = -\rho(x) \tag{1}$$

w przedziale $x \in [-X_b, X_b]$ z warunkiem brzegowym $V(-X_b) = V(X_b) = 0$ dla rozkładu gęstości:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-X_b, -X_a) \\ +1, & x \in [-X_a, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (0, X_a] \\ 0, & x \in (X_a, X_b] \end{cases} \tag{2}$$

2 Dyskretyzacja równań

Wprowadzamy siatkę z węzłami tj. $x_i = -X_b + h * (i-1),\ i = 1, 2, \ldots N$, gdzie $h = 2X_b/(N-1)$ jest odległością między węzłami, a N jest ilością wszystkich węzłów. Przyjmujemy: $X_b = 2$, $X_a = 1/2$. Drugą pochodną w równaniu 1 zastępujemy ilorazem różnicowym zdefiniowanym na siatce:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} = -\rho_i \tag{3}$$

gdzie: h - odległość między węzłami siatki. Rówanie 3 generuje układ równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_1 \\ -\rho_2 \\ -\rho_3 \\ \vdots \\ -\rho_{n-1} \\ -\rho_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Wartości elementów macierzy otrzymujemy wprost z równania 3: $d_i = -2/h^2$, $a_i = c_i = 1/h^2$

3 Warunki brzegowe

Warunki brzegowe wprowadzamy dla pierwszego i ostatniego równania. W pierwszym równaniu kładziemy: $d_1 = 1$, $c_1 = 0$, $\rho_1 = 0$. W ostatnim równaniu kładziemy: $d_n = 1$, $a_n = 0$, $\rho_n = 0$.

4 Zadania do wykonania

1. Rozwiązać równanie Poissona (1) z rozkładem gęstości danym wyrażeniem (2) dla parametrów: $X_b = 2$, $X_a = 1/2$ oraz $N = 50,\ 500$. Do rozwiązania układu zastosować rozkład LU dla macierzy trójdiagonalnej:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} = L{\cdot}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & l_{n-1} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Dla macierzy trójdiagonalnej elementy macierzy L i U liczymy następująco:

$$u_1 = d_1 \tag{6}$$
$$l_i = a_i/u_{i-1},\ i = 2, 3, \ldots, N \tag{7}$$
$$u_i = d_i - l_i c_{i-1},\ i = 2, 3, \ldots, N \tag{8}$$

A rozwiązanie uzyskujemy dwuetapowo. Najpierw rozwiązujemy układ $Ly = b$:

$$y_1 = b_1 \tag{9}$$
$$y_i = b_i - l_i y_{i-1} \tag{10}$$

gdzie: b_i są elementami wektora wyrazów wolnych. a następnie rozwiązujemy drugi układ $Uv = y$:

$$v_n = y_n/u_n \tag{11}$$
$$v_i = (y_i - c_i v_{i+1})/u_i,\ i = n-1, n-2, \ldots, 1 \tag{12}$$

2. Sporządzić wykresy $V(x)$ znalezionych rozwiązań i porównać je z rozwiązaniem dokładnym

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} + \frac{1}{8}, & x \in [-X_b, -X_a] \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{7}{16}x, & x \in [-X_a, 0] \\ \frac{x^2}{2} - \frac{7}{16}x, & x \in [0, X_a] \\ \frac{x}{16} - \frac{1}{8}, & x \in [X_a, X_b] \end{cases} \tag{13}$$

W sprawozdaniu proszę skomentować uzyskane wyniki.