

Metoda Monte Carlo

Tomasz Chwiej

9 stycznia 2014

1 Wyznaczanie objętości i momentu bezwładności kuli metodą Monte Carlo

Definiujemy nasz obiekt za pomocą równania:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2 \quad (1)$$

gdzie $\vec{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ jest środkiem kuli o promieniu R . Każdy punkt $\vec{r} = [x, y, z]$ spełniający powyższe równanie będzie zlokalizowany wewnątrz kuli, inne na zewnątrz.

Ustalamy: $R = 1.0$, $\vec{r}_0 = [1.2, 1.2, 1.2]$. Kulę umieszczamy w odpowiednio większym obszarze o regularnym kształcie, np. w sześcianie o boku $a = 2.4$ oraz umiejscowionym tak aby: $0 \leq x, y, z \leq a$.

Objętość kuli wyznaczamy losując N razy wektor położenia $\vec{r}$ (zawarty wewnątrz sześcianu) i jednocześnie wykorzystując wzór:

$$V_k = \frac{V_s}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i \quad (2)$$

gdzie: N jest liczbą wszystkich wylosowanych punktów, θ jest funkcją przynależności o wartości równej 1 gdy nasz punkt leży wewnątrz kuli (patrz warunek), lub równą 0 jeśli leży poza kulą, $V_s = a^3$ jest objętością sześcianu (zawierającego w sobie kulę).

Wariancja wyznaczenia wartości zmiennej losowej V_k :

$$\sigma_{V_k}^2 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (V_s \theta_i)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N V_s \theta_i \right)^2 \right] \quad (3)$$

Natomiast odchylenie standardowe średniej:

$$\sigma_{\bar{V}_k} = \sqrt{\frac{\sigma_{V_k}^2}{N}} \quad (4)$$

2 Wyznaczanie momentu bezwładności kuli.

Moment bezwładności ciała wokół pewnej osi definiujemy:

$$I = \int_M dm \rho^2 \quad (5)$$

gdzie: ρ jest odległością od osi obrotu, M jest masą ciała. Zakładamy, że obiekt którego moment bezwładności chcemy wyznaczyć jest jednorodny tzn. jego gęstość jest stała. Wówczas można powyższą definicję wyrazić nieco inaczej:

$$I = \gamma \int_V dV (\vec{\rho} - \vec{\rho}_0)^2 \quad (6)$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności metodą orzeł-reszka należy użyć wzoru:

$$I = \frac{V_s \gamma}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_0)^2 \theta_i \quad (7)$$

gdzie: funkcja przynależności θ jest sformułowana identycznie jak w zadaniu pierwszym, $\vec{\rho}_i = [x_i, y_i]$ jest położeniem wylosowanego punktu, a $\vec{\rho}_0 = [x_0, y_0]$ definiuje oś obrotu kuli, $V_s = a^3$ jest objętością sześcianu. Przyjąć gęstość równą $\gamma = 1.0$.

Wariancja momentu bezwładności:

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \left(V_s \gamma (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_0)^2 \theta_i \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N V_s \gamma (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_0)^2 \theta_i \right)^2 \right] \quad (8)$$

oraz odchylenie standardowe średniej:

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{\sigma_I^2}{N}} \quad (9)$$

3 Zadania do wykonania

Uwaga: W poniższych zadaniach proszę przyjąć $N = 10^5$ jako maksymalną liczbę strzałów.

1. Oszacować metodą MC objętość kuli oraz błąd tego oszacowania. Sporządzić wykresy obu wielkości. Do pliku proszę zapisywać wartości całki i błędu co 100 strzałów.
2. Oszacować metodą MC moment bezwładności kuli względem osi przechodzącej przez jej środek oraz błąd tego oszacowania. Sporządzić wykresy obu wielkości. Do pliku proszę zapisywać wartości całki i błędu co 100 strzałów.
3. Sprawdzić prawdziwość tw. Steinera pozwalającego wyznaczyć moment bezwładności kuli względem osi przesuniętej o d względem osi symetrii:

$$I_S = I_0 + M d^2 \quad (10)$$

gdzie: I_0 jest momentem bezwładności obiektu względem jego osi symetrii, M jest jego masą, d jest odległością nowej osi obrotu od osi symetrii. Oszacować metodą MC moment bezwładności kuli dla osi przesuniętej o $d = 0.1$ względem jej osi symetrii oraz błąd tego oszacowania. Sporządzić wykresy obu wielkości.

Uwagi: Aby używać generatora liczb pseudolosowych, najłatwiej zdefiniować sobie makro

```
#define frand() ((double)rand()/(RAND_MAX+1.0))
```

(trzeba dołączyć bibliotekę `<stdlib.h>`). Do wylosowania liczby z zakresu $[0, 1]$ wystarczy instrukcja:

```
xi=frand();
```