Metoda Monte Carlo

14 stycznia 2013

1 Wyznaczanie momentu bezwładności metodą Monte Carlo

Moment bezwładności ciała wokół pewnej osi definiujemy:

$$I = \int_M r^2 dm \tag{1}$$

gdzie:r jest odległością od osi obrotu, M jest masą ciała. Zakładamy, że obiekt którego moment bezwładności chcemy wyznaczyć jest jednorodny tzn. jego gęstość jest stała ($\rho = const$). Wówczas można powyższą definicję wyrazić nieco inaczej:

$$I = \rho \int_\Omega d\Omega r^2 \tag{2}$$

Ω jest objętością ciała. Aby wyznaczyć moment bezwładności metodą orzeł-reszka należy użyć wzoru:

$$\bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(V \cdot \rho \cdot r_i^2 \cdot \theta_i \right) \tag{3}$$

gdzie: θ jest funkcja przynależności do obszaru Ω (przyjmuje wartość 1 w Ω i 0 na zewnątrz), V jest objętością zawierającą w sobie obszar Ω, a r_i jest odległością wylosowanego punktu od osi obrotu. Jeśli chcemy obliczyć wariancję oszacowania wartości całki to korzystamy ze wzoru:

$$\sigma^2(N) = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} (V \cdot \rho \cdot r_i^2 \cdot \theta_i)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} V \cdot \rho \cdot r_i^2 \cdot \theta_i \right)^2 \right] \tag{4}$$

Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej jest związana z σ^2 zależnością:

$$s(\bar{I}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} \tag{5}$$

2 Odległość punktu od prostej w trzech wymiarach

Jeśli prosta przechodzi przez dwa punkty: $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$ to odległość punktu r_i od tej prostej definiuje wzór:

$$r_i = \sqrt{\frac{|\vec{R}_1 - \vec{R}_i|^2 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2 - [(\vec{R}_1 - \vec{R}_i) \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)]^2}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2}} \tag{6}$$

Uwaga: drugi wyraz w liczniku jest kwadratem iloczynu skalarnego.

3 Zadania do wykonania

Przymujemy gęstość równą $\rho = 1$ oraz maksymalną liczbę strzałów w metodzie MC równą $N = 10^6$. Definiujemy obszar V jako sześcian o boku $a = 4$. Srodek sześcianu (V) znajduje się w początku układu współrzędnych $(0, 0, 0)$ oraz załóżmy że $x, y, z \in (-2, 2)$. Obszar Ω stanowi również sześcian ale o boku $b = 2$. Jego środek również znajduje się w punkcie $(0, 0, 0)$ oraz $\theta = 1 \rightarrow x, y, z \in [-1, 1]$.

1. Wyznaczyć metodą MC moment bezwładności oraz błąd jego oszacowania gdy oś obrotu przechodzi punkty: $\vec{r}_1 = [-1, -1, -1]$, $\vec{r}_2 = [1, 1, 1]$. Proszę narysować zależność $\bar{I} = f(N)$ oraz $s(\bar{I}) = f(N)$ - uwaga: na każdym rysunku należy umieścić tylko wartości dla $N = 10^m, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2. Wyznaczyć metodą MC moment bezwładności oraz błąd jego oszacowania gdy oś obrotu przechodzi punkty: $\vec{r}_1 = [1, 1, 1]$, $\vec{r}_2 = [1, 1, -1]$. Proszę narysować zależność $\bar{I} = f(N)$ oraz $s(\bar{I}) = f(N)$ - uwaga: na każdym rysunku należy umieścić tylko wartości dla $N = 10^m, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3. W sprawozdaniu proszę: a) narysować kontur sześcianu i zaznaczyć na nim osie obrotu, b) porównać uzyskane wyniki numeryczne z momentami bezwładności obliczonymi analitycznie.

Uwagi: Aby używać generatora liczb pseudolosowych, najłatwiej zdefiniować sobie makro

```
#define frand() ((double)rand())/(RAND_MAX+1.0)
```

(trzeba dołączyć bibliotekę <stdio.lib>). Do wylosowania liczby z zakresu $[0, 1]$ wystarczy instrukcja:

```
xi=frand();
```