Poszukiwanie minimum wartości funkcji w dwóch wymiarach metodą Newtona.

Tomasz Chwiej

14 listopada 2011

1 Sformułowanie problemu

Naszym zadaniem będzie znalezienie miejsca zerowego funkcji:

$$f(x,y) = x^2 - 4x + 8 + y^2 - 4y + xy \tag{1}$$

Zauważmy, że liczba 8 przesuwa nam jedynie wszystkie wartości o stały poziom więc możemy ją pominąć w dalszych rozważaniach. Szukamy więc minimum funkcji:

$$g(x,y) = f(x,y) - 8 = x^2 - 4x + y^2 - 4y + xy \tag{2}$$

Minimum funkcji będziemy poszukiwać przy użyciu metody Newtona jak dla funkcji kwadratowej:

$$g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}^T A\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{b} \tag{3}$$

gdzie: $\boldsymbol{r}^T = [x, y]$, A jest macierzą Hessego, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2]$ jest wektorem wyrazów wolnych.

Znajdujemy macierz A:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \tag{4}$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 \tag{5}$$

$$a_{21} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 \tag{6}$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 \tag{7}$$

Jeśli policzymy $\frac{1}{2}\boldsymbol{r}^T A\boldsymbol{r} = x^2 + y^2 + xy$ to okaże się, że brakuje nam jeszcze $-4x - 4y$ aby skonstruować funkcję g. Zatem wektor $\boldsymbol{b}$ będzie miał postać $\boldsymbol{b} = [-4, -4]$.

2 Zadania do wykonania

1. Proszę sprządzić wykres konturowy wartości funkcji $g(x, y)$ w zakresie $x \in (-10, 10)$, $y \in (-10, 10)$. Na podstawie wykresu określić przybliżone położenie minimum funkcji g(x,y).

2. Ponieważ funkcja jest kwadratowa, więc możemy spróbować znaleźć gotowe rozwiązanie (używając A^{-1}). Proszę to zrobić. Macierz odwrotną można znaleźć używając np. metody eliminacji Jordana. Wynik porównać z położeniem odczytanym z wykresu konturowego.

3. Proszę użyć przepisu iteracyjnego do znalezienia minimum. Jako punkty startowe przyjąć kolejno: $(0, 0)$, $(10, -10)$, $(100, 100)$, $(500, 500)$. Określić ile iteracji jest potrzebnych do znalezienia minimum (jako warunek zakończenia obliczeń przyjąć $\varepsilon_{i+1} = |\boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i| < 10^{-6}$).

4. W przepisie iteracyjnym wprowadzamy wagę tj. przepis iteracyjny będzie miał postać:

$$\boldsymbol{r}_{i+1} = \boldsymbol{r}_i - \omega \cdot H^{-1} \nabla g(\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

gdzie: $\omega \in [0, 1]$ jest wagą.

Przyjąć jako punkt startowy $\boldsymbol{r}_0 = (10, 10)$ a następnie znaleźć minimum funkcji dla następujących wag: $\omega = 0.1, \quad 0.4, \quad 0.7$. Uzyskane wyniki porównać z poprzednimi ($\omega = 1$).