

Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej - wersja 2

Tomasz Chwiej

12 marca 2020

Zadanie polega na rozwiązaniu układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodą największego spadku.

Uwaga: pogrubiona czcionka oznacza wektor.

1 Zadania do wykonania:

1. Utworzyć macierz układu o rozmiarze $n = 1000$ i wypełnić jej elementy zgodnie z poniższą formułą:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{1}{1.0 + |i - j|}, \quad \text{gdy } |i - j| \leq m, \quad i, j = 0, \dots, n - 1 \\ A_{i,j} &= 0, \quad \text{gdy } |i - j| > m \end{aligned}$$

Przyjąć: $m = 10$

2. Utworzyć wektor wyrazów wolnych $\mathbf{b}$. Jego elementy wypełnić następująco:

$$b_i = i, \quad i = 0, \dots, n - 1 \quad (1)$$

3. Zaprogramować metodę największego spadku do rozwiązania układu równań liniowych:

```
inicjalizacja:  k=0,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$ , A\\
do{
    k++
     $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ 
     $\alpha = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}{\mathbf{r}^T A \mathbf{r}}$ 
     $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{r}$  // aktualizacja rozwiązania
}while (  $\|\mathbf{r}\|_2 > 10^{-6}$  &&  $k < 500$  )
```

gdzie: k-numer iteracji, $\mathbf{x}$ to aktualne przybliżenie wektora rozwiązań a $\mathbf{r}$ jest wektorem reszt.

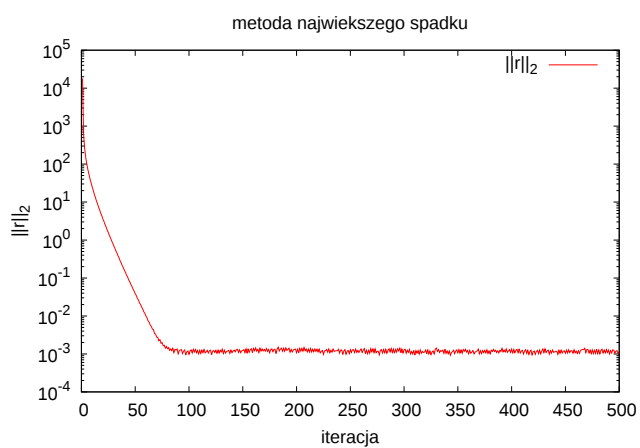
4. Rozwiązać zdefiniowany powyżej układ równań przy użyciu metody największego spadku dla dwóch wektorów startowych $\mathbf{x}$ tj. dla: a) $\mathbf{x} = 0$, b) $\mathbf{x} = 1$ (czy postać wektora startowego wpływa na liczbę iteracji?). W każdej iteracji należy zapisać do pliku: aktualny numer iteracji (k), wartość normy euklidesowej wektora reszt ($\|\mathbf{r}\|_2 = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}$), wartość α_k , wartość normy euklidesowej wektora rozwiązań ($\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$). Jako warunek zakończenia iteracji przyjąć $\sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} < 10^{-6}$.

Obliczenia wykonać w pojedynczej precyzji a następnie w podwójnej precyzji - wyniki będą się różnić (patrz przykładowe wyniki na końcu instrukcji).

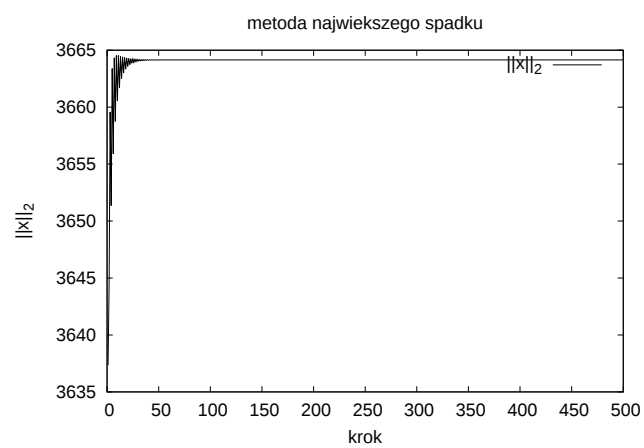
5. Sporządzić wykresy: $\|\mathbf{x}\|_2 = f(k)$ oraz $\|\mathbf{r}\|_2 = f(k)$, gdzie: k - numer iteracji. Dla $\|\mathbf{r}\|_2$ przyjąć skalę logarytmiczną (polecenie **set logscale y** w Gnuplocie)

Przykładowe wyniki

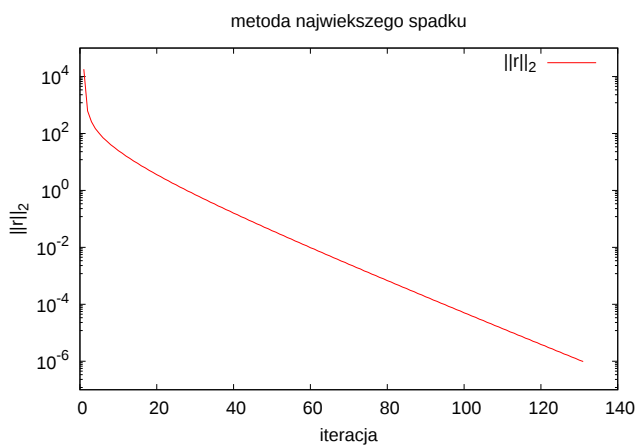
(a)



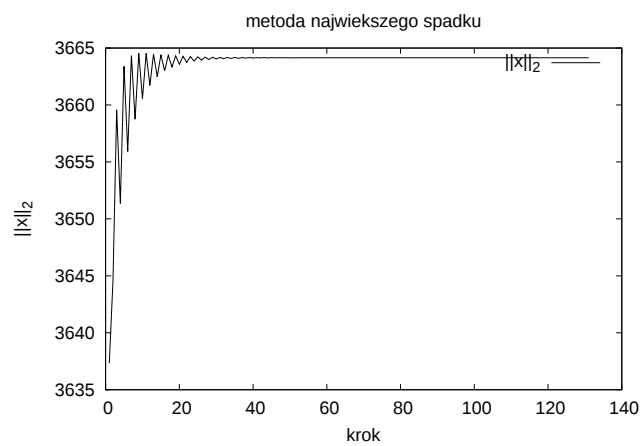
(b)



(c)



(d)



Rysunek 1: Norma wektora reszt i rozwiązania. Wyniki dla pojedynczej precyzji (a,b) oraz dla podwójnej (c,d).