

Aproksymacja Pade funkcji $\sin(x)$

Tomasz Chwiej

8 maja 2018

1 Wstęp

Na laboratorium funkcję $f(x)$ przybliżymy przy pomocy funkcji wymiernej

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i x^i}{\sum_{i=0}^M b_i x^i} \quad (1)$$

z $b_0 = 1$. W tym celu rozwijamy funkcję $f(x)$ w szereg Maclaurina

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (2)$$

i przyrównujemy pochodne $f(x)$ oraz $R_{N,M}(x)$ dla rzędu $k = 0, 1, \dots, N + M$

$$\left. \frac{d^k R_{N,M}(x)}{dx^k} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0} \quad (3)$$

Warunki te generują układ równań

$$\sum_{m=1}^N b_m \cdot c_{N-m+k} = -c_{N+k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & \dots & c_N \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \dots & c_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N & c_{N+1} & \dots & c_{N+M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{N+1} \\ -c_{N+2} \\ \vdots \\ -c_{N+M} \end{bmatrix} \quad (5)$$

który trzeba rozwiązać aby znaleźć współczynniki $\vec{b} = [b_0, b_1, \dots, b_M]$ a następnie korzystamy z relacji

$$a_i = \sum_{j=0}^i c_{i-j} \cdot b_j, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

w celu wyznaczenia współczynników $\vec{a} = [a_0, a_1, \dots, a_N]$.

2 Zadania do wykonania

Naszym zadaniem jest wykonanie aproksymacji Padego funkcji

$$f(x) = \sin(x) \quad (7)$$

kolejno dla $N = M = 3, 5, 7$. W tym celu wykonujemy następujące kroki

1. Ustalamy $n = N + M$ i liczymy pochodne $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\left. \frac{d^k \sin(x)}{dx^k} \right|_{x=0} = \begin{cases} f^{(2p)}(0) = 0, & p = 0, 1, 2, 3, \dots \\ f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p, & p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Współczynniki c_k we wzorze (2) to skalowane pochodne (jak we wzorze Taylora)

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (9)$$

Wartości współczynników c_k zachowujemy w wektorze $\vec{c} = [c_0, c_1, \dots, c_n]$

2. Rozwiązujemy układ równań dany wzorem (5) używając biblioteki GSL

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad (10)$$

gdzie:

$$A_{i,j} = c_{N-M+i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, M-1 \quad (11)$$

$$y_i = -c_{N+1+i}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (12)$$

po rozwiązaniu układu równań (10) zachowujemy współczynniki wielomianu $Q_M(x)$

$$b_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad b_{M-i} = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (13)$$

Współczynniki zapisujemy w wektorze $\vec{b} = [b_0, b_1, \dots, b_M]$.

3. Wyznaczamy współczynniki wielomianu $P_N(x)$ zgodnie z wzorem (6). Współczynniki zapisujemy w wektorze $\vec{a} = [a_0, a_1, \dots, a_N]$.
4. Dla ustalonego n tworzymy wykresy $f(x)$ oraz $R_{N,M}(x)$ (używając wzoru 1) na jednym rysunku w zakresie $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Przykładowe wyniki:

