Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej metodą potęgową z redukcją Hotellinga

Tomasz Chwiej

22 stycznia 2016

Zadania do wykonania:

1. Zdefiniować macierz symetryczną A o wymiarze $n = 7$, której elementy są dane przepisem:

$$A_{ij} = \sqrt{i+j} \tag{1}$$

   gdzie: $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Macierz jest symetryczna więc ma wszystkie wartości własne rzeczywste, podobnie jak składowe wszystkich wektorów własnych.

2. Dokonać redukcji macierzy do postaci trójdiagonalnej ($A- > T$) przy użyciu procedury (Numerical Recipes):

```
tred2(A, n, d,e);
```

   gdzie: A - macierz którą diagonalizujemy, d i e to wektory n-elementowe w których zapisane są składowe diagonali i poddiagonali macierzy wynikowej (trójdiagonalnej)
   Macierz A przekształciliśmy do postaci iloczynu:

$$T = P^{-1}AP \tag{2}$$

   Uwaga: macierz A została nadpisana przez macierz przekształcenia P. W metodzie iteracyjnej (punkt 4) należy użyć jej kopii lub przywrócić jej pierwotną postać (rów. 1).

3. Przy użyciu procedury (Numerical Recipes):

```
tqli(float *d, float *e, int n, float **Z)
```

   gdzie: d i e to wektory otrzymane z procedury tred2(), a Z jest macierzą $n \times n$, w której (w kolumnach) mogą być zapisane wektory własne macierzy T (jeśli na wejściu z jest macierzą jednostkową), znaleźć wartości macierzy trójdiagonalnej T (identyczne jak macierzy pierwotnej A) i zapisać je do pliku.

4. Wartości własne wyznaczymy jeszcze raz, iteracyjnie, przy użyciu metody potęgowej.
   Algorytm

   - Ustalamy numer poszukiwanej wartości własnej $k = 1, 2, \ldots, n$.
   - Przed rozpoczęciem procesu iteracyjnego, dla danego k, deklarujemy wektor startowy, np.: $\boldsymbol{x}_0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$,

- Dla ustalonego k, w każdej iteracji obliczamy kolejno:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{i+1} &= W_k \boldsymbol{x}_i && (3) \\ \lambda_i &= \frac{\boldsymbol{x}_{i+1}^T \boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_i} && (4) \\ \boldsymbol{x}_{i+1} &= \frac{\boldsymbol{x}_{i+1}}{\|\boldsymbol{x}_{i+1}\|_2} && (5) \\ \boldsymbol{x}_i &= \boldsymbol{x}_{i+1} \text{ (przepisujemy wektor)} && (6) \end{aligned}$$

  Wykonujemy 8 iteracji.

- Po zakończeniu procesu iteracyjnego, przeprowadzamy redukcję macierzy:

$$W_{k+1} = W_k - \lambda_k \boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_k^T \tag{7}$$

  Macierz W_{k+1} używamy do znalezienia kolejnej wartości własnej λ_{k+1}. Zakładamy oczywiście, że

$$W_1 = A \tag{8}$$

5. Zapisać do pliku wartości kolejnych przybliżeń λ_i dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$. W sprawozdaniu porównać z wartościami własnymi uzyskanymi przy użyciu procedur z biblioteki Numerical Recipes - ich wartości powinny być zbliżone.

6. Proszę sprawdzić co się stanie jeśli nie będziemy normować wektora w każdej iteracji tj. podczas iteracji nie uwzględniamy równania 5 - informację zamieścić w sprawozdaniu.