Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie.

Tomasz Chwiej

24 kwietnia 2018

1 Wstęp

Należy napisać program do interpolacji funkcjami sklejanymi w bazie. Wartości funkcji interpolującej liczymy zgodnie z wzorem

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \qquad x \in [x_{min}, x_{max}] \tag{1}$$

gdzie sklejki kubiczne $\Phi_i^3(x)$ są zdefiniowane następująco

$$\Phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ 0 & x \notin [x_{-3}, x_{n+3}] \end{cases}$$

gdzie h jest odległością pomiędzy sąsiednimi węzłami. Dla warunków z pierwszą pochodną ($\alpha = df/dx|_{x=x_{min}}$, $\beta = df/dx|_{x=x_{max}}$):

$$-c_0 + c_2 = \frac{h}{3}\alpha \tag{2}$$

i

$$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta \tag{3}$$

układ równań ma postać

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{3}\alpha \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta \end{bmatrix} \tag{4}$$

Do rozwiązania układu równań proszę wykorzystać odpowiednią metodę z Numerical Recipes lub GSL. W naszym przypadku węzły interpolacji powinny być indeksowane $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, ale ponieważ w sumowaniu po wartościach funkcji sklejanych pojawiają się również te położone na zewnątrz należy dołożyć po 1 węźle z lewej i prawej strony. Czyli indeksowanie pierwotnych węzłów będzie takie $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$. Natomiast położenie docelowych węzłów ($i = -2, -1, \ldots, n+2, n+3$) oraz wektor wartości funkcji ($i = 1, 2, \ldots, n$) w węzłach można wyznaczyć następująco:

$$
\begin{aligned}
&float \quad h, x_{min}, x_{max};\\
&int \quad n = \ldots;\\
&double\, xx[n+6];\\
&double\, *x_w = \&xx[2];\\
&h = \frac{x_{max} - x_{min}}{n-1};\\
&for(i = -2; i <= (n+3); i++) \qquad x_w[i] = x_{min} + h \cdot (i-1);\\
&for(i = 1; i <= n; i++) \qquad y_w[i] = f(x_w[i]);
\end{aligned}
$$

Wówczas węzły o indeksach 1 oraz n będą leżały na krańcach przedziału interpolacji. Na brzegach musimy określić pierwsze pochodne, proszę do tego celu użyć ilorazu różnicowego w postaci:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{5}$$

przyjąć $\Delta x = 0.01$.

2 Zadania do wykonania:

1. Przy użyciu swojego programu należy przeprowadzić interpolację funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{6}$$

oraz

$$f_2(x) = cos(2x) \tag{7}$$

w przedziale $x \in [-5, 5]$

2. Wykonać interpolację dla funkcji $f_1(x)$ dla liczby węzłów równej $n = 5, 6, 10, 20$. Dla każdego przypadku sporządzić wykresy funkcji interpolowanej i interpolującej na jednym rysunku.

3. Wykonać interpolację funkcji $f_2(x)$ dla liczby węzłów $n = 6, 7, 14$. Dla każdego przypadku sporządzić wykresy funkcji interpolowanej i interpolującej na jednym rysunku.

3 Uwagi

1. W pierwszym kroku należy stablicować położenia węzłów i wartości funkcji. Następnie należy rozwiązać układ równań (4). Po rozwiązaniu układu równań prosze wypisać na

ekran wartości współczynników c_i - powinny zmieniać się w sposób podobny do funkcji interpolowanej (dla dużego n, np. $n = 10$).

2. Proszę pamiętać że rozwiązując układ równań (4) dostaniemy wektor o indeksach przesunietych w lewo o 1: $c_{old} = [c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]$. Dlatego, aby mieć zgodność z ideksowaniem węzłów należy je przesunąć w prawo o 1 i dodać do listy elementy c_0 i c_{n+1} liczone zgodnie z wzorami (2) i (3):

$$
\begin{array}{lcl}
\vec{c}_{old} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & \ldots & c_{n-1} \\ \hline \end{array} \\
 & & \quad\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\
\vec{c}_{new} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

We wzorze (1) używamy zmodyfikowanego wektora $\vec{c}_{new}$.

3. Aby ułatwić sobie tworzenie wykresów, najlepiej jest napisać funkcję wyznaczającą wartość funkcji interpolującej, której przekazujemy: h, n, $\vec{x}_w, \vec{c}_{new}$, x. Procedura, na podstawie wartości x powinna określić przedział (indeks i) i wyznaczyć wartość funkcji sklejanej na podstawie wzoru (1).