Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Tomasz Chwiej

19 kwietnia 2020

Naszym zadaniem będzie napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

1 Wstęp

Aby rozwiązać problem, należy rozwiązać układ równań liniowych (szczegóły na wykładzie)

$$A\vec{m} = \vec{d} \tag{1}$$

którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \tag{2}$$

gdzie: m_i to poszukiwane wartości drugich pochodnych w węzłach (indeksowanych $i = 0, 1, \ldots, n-1$). Pozostałe oznaczenia to:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i \tag{3}$$

elementy wektora wyrazów wolnych

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \tag{4}$$

oraz położenia węzłów: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i odległości międzywęzłowe

$$h_i = x_i - x_{i-1} \tag{5}$$

W projekcie mamy narzucone warunki na drugie pochodne na brzegach, czyli:

$$m_0 = \alpha, \qquad m_{n-1} = \beta \tag{6}$$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań (wykład), przyjmuje on postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix} \tag{7}$$

Po jego rozwiązaniu wartość funkcji interpolującej dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (numer podprzedziału: $i-1$) wyznaczamy według poniższego przepisu:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{8}$$

gdzie stałe całkowania mają postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}) \tag{9}$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \tag{10}$$

2 Zadania do wykonania

1. Napisać procedurę do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach. Do procedury należy przekazać: a) wektor z położeniami węzłów $\mathbf{x_w}$, b) wektor z wartościami funkcji $\mathbf{y_w}$, c) liczbę węzłów **n**, d) wektor do którego procedura zapisze wartości drugich pochodnych **m**, e) wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach (**alfa** i **beta**)

```
void wyznacz_M(double *x_w,double *y_w, double *m,
               int n, double alfa, double beta)
```

Uwaga: Węzły indeksujemy od 0 do n-1. Do rozwiązania układu równań można wykorzystać procedurę rozkładu LU z biblioteki GSL.

2. Napisać procedurę do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym. Część argumentów będzie identyczna jak dla procedury *wyznacz_M*, ale dodajemy jeszcze aktualną wartość argumentu x [zgodnie z wzorem (8)]:

```
double wyznacz_Sx(double *x_w, double *y_w, double *m, int n, double x){
        znajdz pierwszy podprzedział (i-1):   x_w[i-1] <= x <= x_w[i]
        Sx=wzór(8)
        return Sx;
}
```

3. Utworzyć wektor zawierający położenia n równoodległych wezłów i wektor odpowiadających im wartości funkcji. Położenia węzłów można wygenerować zgodnie z poniższym wzorem

$$x_w[i] = x_{min} + \Delta x \cdot i, \qquad i = 0, 1, \ldots n-1, \qquad \Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n-1} \tag{11}$$

gdzie: x_{min} to lewy kraniec przedziału interpolacji a x_{max} to prawy kraniec.

4. Napisać program do interpolacji funkcjami sklejanymi, który będzie korzystał z dwóch powyższych procedur. Przy użyciu swojego programu przeprowadzić interpolację funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{12}$$

oraz

$$f_2(x) = cos(2x) \tag{13}$$

Przyjąć warunki z drugą pochodną równą 0 na obu krańcach przedziału interpolacji

$$\alpha = \beta = 0 \tag{14}$$

Wykonać interpolację dla $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$ w przedziale $x \in [-5, 5]$, dla liczby węzłów: $n = 5$, 8, 21. Sporządzić wykresy funkcji interpolowanej $[f(x)]$ i interpolującej $[s(x)]$ dla każdego przypadku na jednym rysunku (będzie 6 rysunków).

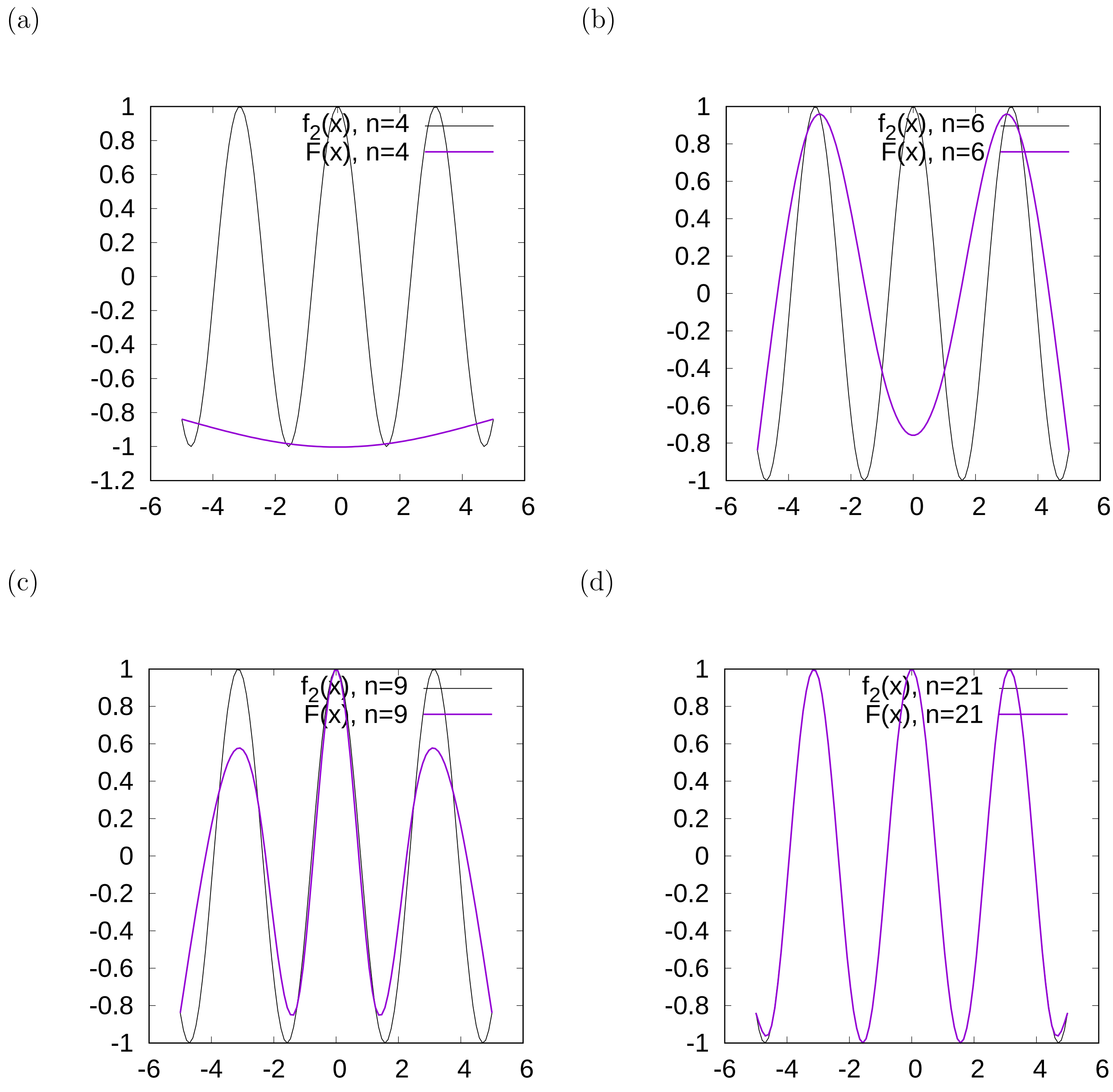
5. Dla funkcji $f_1(x)$ oraz $n = 10$ węzłów w przedziale $x \in [-5, 5]$ należy wyznaczyć wartości drugich pochodnych i porównać je z "dokładniejszymi" wartościami liczonymi zgodnie z wzorem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \delta x) - 2f(x) + f(x + \delta x)}{(\delta x)^2} \tag{15}$$

Przyjąć $\delta x = 0.01$. Wykonać wykres wartości drugich pochodnych w zależności od położenia węzłów pokazujący porównanie obu sposobów obliczania drugich pochodnych.

W sprawozdaniu we wstępie proszę opisać podstawy metody, proszę określić jakość interpolacji (czy obserwujemy efekt Rungego? co się dzieje w pobliżu krańców przedziału interpolacji?), jak ilość węzłów wpływa na interpolację? Wyniki proszę komentować wskazując także na różnice zauważone pomiędzy interpolacją Lagrange'a a interpolacją sklejkami kubicznymi.

3 Przykładowe wyniki dla funkcji $f_2(x)$



Rysunek 1: Interpolacja funkcji $f_2(x)$ dla $n = 4, 6, 9, 21$.