Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą relaksacji

Tomasz Chwiej

12 marca 2020

Chcemy znaleźć numerycznie rozwiązanie równania różniczkowego

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + (x^2 - 2E)\psi = 0, \quad \psi = \psi(x) \tag{1}$$

w przedziale $x \in [-6, 6]$, gdzie E stanowi parametr. W tym celu wprowadzamy siatkę równoodległych węzłów $x_i = h \cdot i \quad i = -N, -N+1, \ldots, N-1, N$, gdzie $h = 6/N$ jest odległością międzywęzłową.
Uwaga: jako indeks w tablicy jednowymiarowej (wektorze) stosujemy numerację

$$k = i + N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2 \cdot N \tag{2}$$

Dyskretyzujemy operator drugiej pochodnej przy pomocy ilorazu różnicowego drugiego rzędu

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}{h^2} \tag{3}$$

Dzięki dyskretyzacji równania różniczkowego na siatce dostajemy zależność:

$$\psi_{i-1} + (2Eh^2 - x_i^2 h^2 - 2)\psi_i + \psi_{i+1} = 0 \tag{4}$$

Na brzegach obszaru wprowadzamy warunki:$\psi_{-N} = 0$ i $\psi_N = 0$, które wprowadzamy do układu równań: $Ay = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{-N} \\ \psi_{-N+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Macierz układu ma postać trójdiagonalną więc jej elementy możemy zapisać jako 3 wektory, których elementy są równe: $a_1 = 1$, $a_2 = 2Eh^2 - x_i^2 h^2 - 2$, $a_3 = 1$. Układ należy rozwiązać metodą relaksacji. Zmianę elementów wektora rozwiązania przybliżonego w jednej iteracji daje przepis:

$$y^{(k+1)} = -D^{-1}\omega L y^{(k+1)} + D^{-1}\left[-\omega U + (1-\omega)D\right] y^{(k)} + D^{-1}\omega b \tag{6}$$

gdzie: L jest macierzą trójkątną dolną (wektor elementów a_1), D jest macierzą diagonalną (elementy a_2), U jest macierzą trójkątną górną (elementy a_3), ω stanowi parametr relaksacji.

Łatwo zauważyć, że zmianie ulegać będą tylko elementy wektora rozwiązań od $i = -N + 1, \ldots, N - 1$

$$y[i] = -(1/a_2[i])\omega a_1[i]y[i-1] + (1/a_2[i])\left(-\omega a_3[i]y[i+1] + (1-\omega)a_2[i]y[i]\right) + (1/a_2[i])\omega b[i] \quad (7)$$

Zadania do wykonania:

1. Zaprogramować metodę nadrelaksacji do rozwiązania układu równań
2. przyjąć parametry: $E = 0.5$, $N = 400$
3. rozwiązać układ równań dla następujących wartości ω: $\omega = 0.5; 1.0; 1.5; 1.9$
4. narysować na jednym wykresie zależność $\|r\|_2 = f(numer\_iteracji)$ dla powyższych wartości ω, gdzie: $\|r\|_2$ jest normą wektora reszt
5. narysować uzyskane rozwiązanie