Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia (metoda Newtona).

Tomasz Chwiej

9 listopada 2015

1 Postawienie problemu

Dany jest wielomian, którego zera chcemy znaleźć:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \tag{1}$$

Jeśli podzielimy wielomian przez wyraz $(x - x_j)$ to otrzymamy:

$$f(x) = (x - x_j)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0) + R_j \tag{2}$$

Współczynniki nowego wielomianu $(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0)$ wyznaczamy rekurencyjnie:

$$b_n = 0 \tag{3}$$

$$b_k = a_{k+1} + x_j b_{k+1},\ k = n-1, n-2, \ldots, 0 \tag{4}$$

$$R_j = a_0 + x_j b_0 \tag{5}$$

Po wykonaniu kolejnego dzielenia otrzymalibyśmy:

$$f(x) = (x - x_j)^2(c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} + \ldots + c_0) + R_j^{'}(x - x_j) + R_j \tag{6}$$

A współczynniki c_n oraz czynnik $R_j^{'}$ wyznaczamy identycznie jak b_n i R_j (wzory: 3, 4, 5).
W metodzie Newtona zera wielomianu możemy wyznaczać iteracyjnie zgodnie z poniższą formułą:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{R_j}{R_j^{'}} \tag{7}$$

gdzie: x_{j+1} to kolejne, lepsze przybliżenie zera, a czynniki R_j i $R_j^{'}$ wyznaczamy zgodnie z wzorem 5.

2 Pseudokod

Proces wyznaczania zer wielomaniu można zilustrować przy pomocy poniższego pseudokodu:

```
ustalamy stopien wielomianu: N
inicjalizacja wektora danych: a[i]=...., dla  i=0,1,...,N

petla po kolejnych zerach wielomianu
for(L=1; L<=N; L++){

   ustalamy aktualny stopien wielomanu:    n=N-L+1
   inicjalizacja wzoru iteracyjnego: x0
```

```
  for(it=1; it<=IT_MAX; it++){
       wyznaczamy: Rj=...
       wyznaczamy: Rj'=...

       x1=x0-Rj/Rj'

       warunek wczesniejszego opuszczenia petli: |x1-x0| <1.0E-7

       zachowujemy nowe przybliżenie:
            x0=x1
            zapisujemy do pliku: L, it, x0, Rj,Rj'
   }
  usuwamy znalezione zero z wielomianu (redukcja stopnia wiel. o 1):
  for(i=0; i<=(n-1); i++)a[i]=b[i]
}
```

3 Zadania do wykonania

1. Napisać funkcję obliczającą wartość R_j dla danej wartości x_j (x0 w pseudokodzie). Argumentami funkcji mają być: i) wektor zawierający współczynniki aktualnego wielomianu $\vec{a}$ (float a[N+1]), ii) wektor do którego funkcja wpisze współczynniki wielomianu o stopień niższego $\vec{b}$ (float b[N+1]), iii) stopień wielomianu (n) i iv) wartość x_j dla którego funkcja ma zwracać wartość R_j. Czyli:

   ```
   Rj = licz_r(a,b,n,x0)
   ```

   Uwaga: Zastosowanie tej funkcji po raz drugi w danej iteracji dla wektora współczynników $\vec{b}$ dostarczy nam wektor $\vec{c}$ oraz wartość czynnika $R_j^{'}$. Należy tylko pamiętać aby parametr określający stopien wielomaniu był o 1 mniejszy niż w pierwszym wywołaniu.

   ```
   Rj' = licz_r(b,c,n-1,x0)
   ```

2. Zaprogramować metodę iterowanego dzielenia do poszukiwania zer wielomianu z wykorzystaniem napisanej funkcji.

3. Znaleźć wszystkie zera wielomianu: $f(x) = x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 92x^2 - 196x + 240$. Jako wartości startowe x_0 proszę dla każdego poszukiwanego zera przyjąć: $x_0 = 0$. Wartość $IT_{MAX} = 30$. W każdej iteracji do pliku należy zapisać: numer zera, numer iteracji, wartość przybliżenia x_j oraz wartość reszty z dzielenia R_j i $R_j^{'}$.

Uwaga: zera wielomianu to $1,\ 2,\ -3,\ -4,\ -10$.