1. Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone: 3, -5, $-1+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$

2. Znajdź część rzeczywistą i urojoną liczb zespolonych:

   (a) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$,

   (b) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{30}$,

   (c) $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$,

   (d) $\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

3. Rozwiąż równania. Wynik przedstaw w postaci algebraicznej (trygonometrycznej i wykładniczej).

   (a) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$,

   (b) $z^6 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{12}$,

   (c) $z^2 = 7 - 24i$,

   (d) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$

   (e) $\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{z} + 1 = 0$

   (f) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 - 3\left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 3 + i = 0$

   (g) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0$

   (h) $|z| + z = 8 + 4i$

   (i) $2z + (1+i)\overline{z} = 1 - 3i$

   (j) $z\overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$

   (k) $|z|^2 + (1+i)\overline{z} = 0$

   (l) $z^2|z|^2\overline{z}^2 = 27iz$

   (m) $z|z| = -(\overline{z})^2$

   (n) $z^3 = (iz+1)^3$

   (o) * $z\sqrt{(-1+i)^{40}} = z^3(-1-\sqrt{3}i)^9$

4. Oblicz:

   (a) $\sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$

   (b) $\sqrt{-11+60i}$

   (c) $\sqrt[4]{-4}$

   (d) $\sqrt[3]{(1+i)^6}$

5. Sprawdzić, że liczba zespolona $z_0 = 1 + i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu

   $$w(z) = z^4 - z^3 - 3z^2 + 8z - 6.$$

   Znaleźć pozostałe pierwiastki.

6. Przedstaw w postaci algebraicznej wszystkie pierwiastki wielomianu:

$$w(z) = (z^3 - (i - \sqrt{3})^6)(z^2 - \sqrt{3}iz - i)$$

7. Podaj interpretację geometryczną zbiorów:

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z + 3 - i| \leqslant 4\}$
   (b) $B = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(iz + 4) \geqslant 0\}$
   (c) $C = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{|z+3|}{|z-2i|} \geqslant 1\}$
   (d) $D = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}z < 3 + \mathrm{Im}z\}$
   (e) $E = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{\pi}{6} < \arg(z - i) \leqslant \frac{\pi}{3}\}$,
   (f) $F = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{\pi}{6} < \arg(iz) \leqslant \frac{\pi}{3}\}$,
   (g) $G = \{z \in \mathbb{C};\ \arg(z^6) = \pi\}$,
   (h) $H = \{z \in \mathbb{C};\ \arg(z^3) \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\}$,
   (i) $I = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z^4) > 0\}$,
   (j) * $J = \{z \in \mathbb{C};\ \arg(\frac{z+1}{z-i}) = \frac{\pi}{2}\}$,
   (k) $K = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \arg(\frac{z}{i}) \leqslant \frac{\pi}{4}\}$,
   (l) $L = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{\pi}{4} \leqslant \arg\frac{i}{z} \leqslant \frac{3\pi}{4}, |-z-3+i| < 5\}$
   (m) $M = \{z \in \mathbb{C};\ 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1\}$

Zadanie domowe:

1. Podaj interpretację geometryczną zbiorów:

   (a) * $N = \{z \in \mathbb{C};\ \arg(z - i)^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\}$
   (b) $O = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \arg\left((1 - i)\overline{z}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}\}$

2. Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby:

   (a) $\sin\alpha + i\cos\alpha$
   (b) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$