

1. Wykonaj działania:

$$a) \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \right)^T \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Dla danej macierzy  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  znajdź wszystkie macierze  $B$  takie, że  $A \cdot B = B \cdot A$ .

3. Rozwiąż równania macierzowe:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Wyznacz rzędy macierzy:

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad b) B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad c) C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Wyznacz rzędy następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego  $p$ :

$$a) A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}, \quad b) B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Oblicz wyznacznik macierzy i jeśli jest ona nieosobliwa, znajdź macierz do niej odwrotną:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

7. Niech  $A$  będzie macierzą kwadratową. Udowodnij, że:

(a) jeżeli  $A^2 - A + I = 0$ , to  $A$  jest nieosobliwa i  $A^{-1} = I - A$ ,

(b) jeżeli  $A^k = 0$ , to  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$  (dla  $k \geq 1$ ).

8. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej  $A$  stopnia  $n$ , jeżeli:

(a)  $A^2 = A^T$ ,

(b)  $A^T - A^{-1} = 0$ ,

(c)  $A^2 + A^{-1} = 0$ .