1. Zbadaj liniową niezależność zbioru wektorów w odpowiedniej przestrzeni wektorowej:
   (a) $\{(1, -2, 3), (1, 0, 1), (-1, 2, 1)\}$ w $\mathbb{R}^3$
   (b) $\{(2, 3, 1), (2, 0, 0), (0, 3, 1)\}$ w $\mathbb{R}^3$
   (c) $\{(1, 0, 1), (2, 4, 1), (3, 8, 1)\}$ w $\mathbb{R}^3$
   (d) $\{(1, 0, 0, -1), (-1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ w $\mathbb{R}^4$

2. Dla jakiej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dany zbiór wektorów jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych?
   (a) $\{(1, 2, 1), (m, 0, 1), (2, 2, 2)\}$
   (b) $\{(0, 2, 1), (2, 3, 1 - m), (0, 6, 3)\}$

3. Sprawdź, czy wektory $(2, -1, 3)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

4. Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^n$
   (a) $A = \{(x, y, z) : x + y + 2z = 2\}$
   (b) $B = \{(x, y, z) : x \leqslant 0\}$
   (c) $C = \{(x, y, z) : x = 2z, z = 0\}$

5. Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:
   (a) $A = \{f : f(2) = f(7)\}$
   (b) $B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$
   (c) $C = \{f : f'(0) = 0\}$

6. Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_6[x]$ (przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej 6) są jej podprzestrzeniami:
   (a) $A = \{w : w(-1)w(1) = 0\}$
   (b) $B = \{w : w(x) \text{ jest podzielny przez } x^2 + 1\}$
   (c) $C = \{w : w(5) = 0\}$

7. Wyznacz bazy i wymiary podanych podprzestrzeni wektorowych:
   (a) $A = \{(x + y, x - y + z, x + z, y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ w $\mathbb{R}^4$
   (b) $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = t + 2z = 0\}$
   (c) $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + 3t = 0\}$
   (d) $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = z - y = x - y\}$
   (e) podprzestrzeni wektorowej z zad. 1

8. Niech V będzie podprzestrzenią w $\mathbb{R}^4$ generowaną przez wektory $(2, 1, 3, 1)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(-1, 1, -3, 0)$. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni V.

9. Niech $p \in \mathbb{R}$ i $u_1 = (p, 1, 1)$, $u_2 = (1, p, 1)$, $u_3 = (1, 1, p)$. Zbadaj w zależności od parametru p wymiar podprzestrzeni $\text{lin}\{u_1, u_2, u_3\}$.

10. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ podane zbiory wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni?
    (a) $A = \{(p-2, -p), (3, 2+p)\}$ w $\mathbb{R}^2$
    (b) $B = \{(1, 3, p), (p, 0, -p), (1, 2, 1)\}$ w $\mathbb{R}^3$
11. Wyznacz współrzędne wskazanych wektorów w znalezionych bazach podanych podprzestrzeni wektorowych:
    (a) $v = (8, 4, 2, 9)$, $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y = y - 2z = 0\}$
    (b) $v = (1, 0, 1)$, $V = \mathrm{lin}\{(2, 0, 0), (2, 0, 1), (0, 0, -1)\}$
12. Niech $V = \{(x + 2z, y - z, 2x + y + 3z, x + 2y) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
    (a) Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni V.
    (b) Sprawdź, czy wektory $v_1 = (1, 1, 3, 3)$, $v_2 = (1, 0, 4, 4)$ należą do podprzestrzeni V. Jeśli tak, to podaj współrzędne danego wektora w znalezionej bazie.
13. Sprawdź, czy zbiór $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : e^{2x_1 - x_2 - x_3} = 1\}$ jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^3$. Jeśli tak, to znajdź bazę tej podprzestrzeni. Uzasadnij, że $u = (2, 2, 2) \in A$ oraz podaj współrzędne u w znalezionej bazie. Podaj współrzędne wektora $v = (0, 1, 1)$ w znalezionej bazie.
14. Niech $V = \{(x, y, x, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = z - y, x = y + t\}$. Podaj $\mathrm{dim}V$, bazę V oraz określ współrzędne wektora $(2, 1, 5, 1)$ w tej bazie.
15. Wiadomo, że $B = (v_1, v_2)$ jest taką bazą $\mathbb{R}^2$, że $(-1, 5) = [-2, 3]_B$. Znajdź wektor $v_1 \in \mathbb{R}^2$, jeśli wiadomo, że $v_2 = (1, 1)$.
16. Znajdź bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$, w której wektor $u = [0, -1, 2, 0]$ ma wszystkie współrzędna równe 1.
17. Znaleźć taką bazę przestrzeni liniowej $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = t, x - 3y + 2z = 0\}$, żeby wektor $(1, 1, 1, 1) \in V$ miał w tej bazie współrzędne $[2, 2]$.